Chương 1. HÀM VÉC TƠ

1.1 Tìm miền xác định của hàm véc tơ

(a) Xác định các hàm thành phần: $x = x(t)$ $y = y(t)$ $z = z(t)$

(b) Tìm miền xác định của từng hàm thành phần

(c) Kết hợp và kết luận

Ví dụ 1 Hàm véc tơ $\mathbf{r}(t) = \langle \sqrt{4-t^2},\ e^{-3t}, \ln(t+1)\rangle$

Lời giải

Các hàm thành phần: $x = \sqrt{4-t^2},\ y = e^{-3t}, z = \ln(t+1)$

Miền xác định của x: $4 - t^2 \geq 0 \Leftrightarrow (2-t)(2+t) \geq 0 \Leftrightarrow -2 \leq t \leq 2$ $[-2, 2]$

Miền xác định của y: $\forall t$ $(-\infty, +\infty)$

Miền xác định của z: $t + 1 > 0 \Leftrightarrow t > -1$ $(-1, +\infty)$

Miền xác định của **r**(t) là: $-1 < t \leq 2$ $(-1, 2]$

Ví dụ 2 Hàm véc tơ $\mathbf{r}(t) = \mathbf{k}$

Lời giải

Các hàm thành phần:

$$x = \frac{t^2-1}{t-1} \qquad y = \sqrt{t+8} \qquad z = \frac{\sin \pi t}{\ln t}$$

Miền xác định của x: $t - 1 \neq 0 \Leftrightarrow t \neq 1$ $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$

Miền xác định của y: $t + 8 \geq 0 \Leftrightarrow t \geq -8$ $[-8, +\infty)$

Miền xác định của z: $t > 0$ và $t \neq 1$ $(0, 1) \cup (1, +\infty)$

Miền xác định của **r**(t) là: $t > 0$ và $t \neq 1$ $(0, 1) \cup (1, +\infty)$

1.2 Tìm giới hạn của hàm véc tơ

Áp dụng các kiến thức về giới hạn của hàm một biến để tìm giới hạn của từng hàm thành phần (trong cùng một quá trình).

(a) Nếu một trong các giới hạn đó không tồn tại thì kết luận hàm véc tơ không có giới hạn trong quá trình đó.

(b) Nếu cả ba hàm x(t), y(t) và z(t) cùng có giới hạn là x_0, y_0 và z_0 tương ứng, thì giới hạn của hàm véc tơ là (x_0, y_0, z_0).

Ví dụ 1 Tìm giới hạn của $\mathbf{r}(t) = \langle \sqrt{4-t^2},\ e^{-3t}, \ln(t+1)\rangle$ khi $t \to 0$.

Lời giải

Khi $t \to 0$ thì: $x(t) = \sqrt{4-t^2} \to 2, y(t) = e^{-3t} \to 1, z(t) = \ln(t+1) \to 0$

Vậy $\mathbf{r}(t) = \langle \sqrt{4-t^2},\ e^{-3t}, \ln(t+1)\rangle \to \langle 2, 1, 0\rangle$ khi $t \to 0$.

Ví dụ 2 Tìm giới hạn của $\mathbf{r}(t) = \left\langle \frac{1+t^2}{1-t^2}, \frac{\sin t}{t}, \frac{t}{e^t}\right\rangle$ khi $t \to +\infty$

Lời giải Khi $t \to +\infty$, ta thấy

$$x(t) = \frac{1+t^2}{1-t^2} = \frac{\frac{1}{t^2}+1}{\frac{1}{t^2}-1} \to -1 \qquad y(t) = \frac{\sin t}{t} \leq \frac{1}{t} \to 0 \qquad z(t) = \frac{t}{e^t} \to 0$$

Vậy $\mathbf{r}(t) \to \langle -1, 0, 0\rangle$ khi $t \to +\infty$.

Ví dụ 3 Tìm giới hạn khi t → 0 của $\mathbf{r}(t) = \left\langle \frac{e^{-t}-1}{t}, \frac{t}{\ln(1-t)}, (1+\sin t)^{\frac{1}{t}} \right\rangle$

Lời giải Khi t → 0 thì

$$x(t) = \frac{e^{-t}-1}{t} = -\frac{e^{(-t)}-1}{(-t)} \to -1$$

$$y(t) = \frac{t}{\ln(1-t)} = -\frac{(-t)}{\ln[1+(-t)]} \to -1$$

$$z(t) = (1+\sin t)^{\frac{1}{t}} = \left\{(1+\sin t)^{\frac{1}{\sin t}}\right\}^{\frac{\sin t}{t}} \to e^1 = e$$

Vậy $\mathbf{r}$(t) → ⟨−1, −1, e⟩ khi t → 0.

Ví dụ 4 Tìm giới hạn khi t → 0 của $\mathbf{r}(t) = \left\langle \sin\frac{1}{t}, t, \cos t \right\rangle$

Lời giải Khi t → +0 thì $\frac{1}{t} \to +\infty$, nhưng $\sin\frac{1}{t}$ không có giới hạn.

Vậy không tồn tại giới hạn của $\mathbf{r}$(t) khi t → 0.

1.3 Vẽ đồ thị đường cong được cho bởi của hàm véc tơ

Chúng ta có thể sử dụng MATLAB để vẽ các đường cong và mặt cong.

1.3.1 Vẽ đường cong trong không gian hai chiều

(a) Sử dụng hàm ezplot(funx, funy,[tmin,tmax])

Ví dụ 1 Vẽ đồ thị đường cong được cho bởi $\mathbf{r}$(t) = ⟨2cos t, 3 sin t⟩ trên [0, 2π]

Lời giải

```
ezplot('2*cos(t)','3*sin(t)', [0, 2*pi])
```

Ví dụ 2 Vẽ đồ thị đường cong $y = e^{-x^2}$ trên [−1, 1]

Lời giải Phương trình tham số tương ứng là $x = t \quad y = e^{-t^2}$, t ∈ [−1, 1]

```
ezplot('t','exp(−t^2)', [−1, 1])
```

(b) Sử dụng hàm plot(x, y,...)

Ví dụ 3 Vẽ đồ thị đường cong được cho bởi $\mathbf{r}$(t) = ⟨2cos t, 3 sin t⟩ trên [0, 2π]

Lời giải

```
t = 0 : .01 : 2*pi; plot(2*cos(t), 3*sin(t));
```

Ví dụ 4 Vẽ đồ thị đường cong $y = e^{-x^2}$ trên [−1, 1]

Lời giải Phương trình tham số tương ứng là $x = t \quad y = e^{-t^2}$, t ∈ [−1, 1]

```
t = −1 : .01 : 1;
plot(t, exp(−t.^2));     % Chú ý: có dấu chấm "." trước phép toán "^"
```

Ví dụ 5 Vẽ đồ thị hàm y = sinx trên [−π/2, π/2] và hàm ngược của nó trên cùng một hình.

Lời giải Ta sử dụng lệnh **hold on** để giữ đường cũ khi vẽ đường mới.

```
t = −pi/2 : .01 : pi/2; plot(t, sin(t), 'red','linewidth', 2); % Vẽ với màu đỏ, nét kép
hold on;
t = −1: .01 : 1; plot(t, asin(t), 'b','linew', 2);  % Viết tắt: màu xanh, nét kép
```

Ví dụ 6 Vẽ đồ thị các hàm y = sinx và y = cosx trên [−π, π] trên cùng một hình.

Lời giải Đường sinx màu đỏ, đường cosx màu xanh, cả hai cùng nét kép

```
t = −pi : .01 : pi;
plot(t, sin(t), 'red', t, cos(t), 'blue', 'linew', 2); % Vẽ với màu đỏ, nét kép
```

1.3.2 Vẽ đường cong trong không gian ba chiều

(a) Sử dụng hàm ezplot3(funx, funy, funz, [tmin, tmax])

Ví dụ 1 Vẽ đồ thị đường cong được cho bởi $\mathbf{r}(t) = \langle 3\cos t, 4\sin t, 2t\rangle$ trên $[0, 8\pi]$

Lời giải

```
ezplot3('3*cos(t)','4*sin(t)', '2*t',[0, 8*pi])
```

Ví dụ 2 Vẽ đường tròn bán kính 2, tâm tại gốc tọa độ, nằm trong mặt phẳng z = 3.

Lời giải

```
ezplot3('2*cos(t)','2*sin(t)', '3*t^0',[0, 2*pi])
```

Ví dụ 3 Vẽ đường tròn bán kính 2, tâm tại (1, 2, 3), nằm trong mặt phẳng x = 1.

Lời giải

```
ezplot3('t^0','2+2*cos(t)','3+2*sin(t)',[0, 2*pi])
```

(b) Sử dụng hàm plot3(x, y, z,...)

Ví dụ 4 Vẽ đồ thị đường cong được cho bởi $\mathbf{r}(t) = \langle 3\cos t, 4\sin t, 2t\rangle$ trên $[0, 8\pi]$

Lời giải

```
t = 0 : .01 : 8*pi; plot3(3*cos(t),4*sin(t), 2*t)
```

Ví dụ 5 Vẽ ba hình chiếu của đường cong trong Ví dụ 4 xuống các mặt phẳng tọa độ.

Lời giải Chiếu xuống mặt *xy* thì cho thành phần *z* bằng véc tơ **0** (là 0*t).

```
t = 0: .1 : 8*pi;
plot3(3*cos(t),4*sin(t), 0*t,'red','linew',2);
hold on;
plot3(3*cos(t),0*t, 2*t,'blue','linew',2);
plot3(0*t,4*sin(t), 2*t,'green','linew',2);
```

1.4 Xác định phương trình tham số của đường cong được cho bởi giao của hai mặt cong

Giả sử hai mặt cong có phương trình tổng quát $F_1(x, y, z) = 0$ và $F_2(x, y, z) = 0$.

Ta cần khử một biến, hoặc x, hoặc y, hoặc z khỏi một phương trình, bằng cách rút z từ phương trình nọ thế vào phương trình kia, để nhận được một phương trình chỉ chứa hai biến. Đây thực chất là phương trình của một mặt trụ.

Ví dụ, từ phương trình $F_2(x, y, z) = 0$ ta rút ra được $z = z(x, y)$, thay vào phương trình thứ nhất nhận được phương trình $F(x, y) = 0$.

Tìm cách tham số hóa phương trình $F(x, y) = 0$, giả sử đó là $x = f(t)$, $y = g(t)$. Thay x và y bởi các biểu thức f(t) và g(t) vào phương trình $z = z(x, y)$ ta nhận được $z = z(f(t), g(t)) = h(t)$.

Vậy phương trình tham số của đường cong là giao của hai mặt cong đã cho là:

$$x = f(t) \qquad y = g(t) \qquad z = h(t)$$

Ví dụ 1 Tìm phương trình tham số của đường cong là giao của hai mặt cong

$$x^2 + y^2 = 1 \text{ và } z = x^2$$

Lời giải Từ phương trình thứ hai ta có $z = x^2$. Phương trình thứ nhất không chứa z, cũng coi như ta đã khử được z và nhận được phương trình $x^2 + y^2 = 1$.

Để tham số hóa, đặt $x = \cos t$, $y = \sin t$, rồi thế vào $z = x^2$ ta nhận được $z = \cos^2 t$.

Vậy phương trình tham số của giao tuyến là $x = \cos t, y = \sin t, z = \cos^2 t$

Ví dụ 2 Tìm phương trình tham số của đường cong là giao của hai mặt cong

$$x^2 + y^2 = 4 \text{ và } z = xy$$

Lời giải Từ phương trình thứ hai, coi như ta đã rút ra được $z = z(x, y) = xy$.

Ta tham số hóa phương trình thứ nhất (coi như đã khử được z) bằng cách đặt x = 2cost y = 2sint

Thay x, y bởi các biểu thức theo t vào z = xy, ta nhận được z = cost sint = $\frac{1}{2}\sin 2t$.

Vậy phương trình tham số là $x = 2\cos t\,, y = 2\sin t\,, z = \frac{1}{2}\sin 2t$

Ví dụ 3 Tìm phương trình tham số của đường tròn là giao của mặt phẳng x + y + z = 1 với mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 5$.

Lời giải Từ phương trình thứ nhất ta có z = 1 – z – y. Thay z vào phương trình thứ hai ta nhận được $x^2 + y^2 + (1 - x - y)^2 = 5$, hay $x^2 + y^2 + xy - x - y = 2$.

Ta cần biến đổi để khử số hạng chéo xy theo phương pháp Lagrange

$$x^2 + y^2 + xy - x - y = 2 \Leftrightarrow \left(x + \tfrac{1}{2}y\right)^2 + \tfrac{3}{4}y^2 - x - y = 2 \qquad (*)$$

Đặt $u = x + \frac{1}{2}y$ suy ra $x = u - \frac{1}{2}y$, thay vào (*) ta được

$$u^2 + \tfrac{3}{4}y^2 - u - \tfrac{1}{2}y = 2 \qquad (2*)$$

Số hạng chéo đã khử được, ta khử tiếp các số hạng bậc nhất

$$u^2 - u = \left(u - \tfrac{1}{2}\right)^2 - \tfrac{1}{4} \qquad \tfrac{3}{4}y^2 - \tfrac{1}{2}y = \tfrac{3}{4}\left(y - \tfrac{1}{3}\right)^2 - \tfrac{1}{12}$$

Thay vào (2*) ta nhận được

$$\left(u - \tfrac{1}{2}\right)^2 + \tfrac{3}{4}\left(y - \tfrac{1}{3}\right)^2 = \tfrac{7}{12} \quad \text{hay} \quad \frac{\left(u-\frac{1}{2}\right)^2}{\left(\sqrt{\frac{7}{12}}\right)^2} + \frac{\left(y-\frac{1}{3}\right)^2}{\left(\sqrt{\frac{7}{9}}\right)^2} = 1$$

Đây là phương trình của một ellipse. Ta tham số hóa bằng cách đặt

$u - \frac{1}{2} = \sqrt{\frac{7}{12}}\cos t$ $\quad y - \frac{1}{3} = \sqrt{\frac{7}{9}}\sin t$ $\quad$ hay $u = \sqrt{\frac{7}{12}}\cos t + \frac{1}{2}$ $\quad y = \sqrt{\frac{7}{9}}\sin t + \frac{1}{3}$

Vì $x = u - \frac{1}{2}y$ nên $x = \sqrt{\frac{7}{12}}\cos t + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{9}}\sin t - \frac{1}{6} = \sqrt{\frac{7}{12}}\cos t - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{9}}\sin t + \frac{1}{3}$

Thay vào phương trình z = 1 – x – y, ta nhận được

$$z = -\sqrt{\tfrac{7}{12}}\cos t - \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{7}{9}}\sin t + \tfrac{1}{3}$$

Vậy phương trình tham số của tròn đó là

$$x = \sqrt{\tfrac{7}{12}}\cos t - \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{7}{9}}\sin t + \tfrac{1}{3} \qquad y = \sqrt{\tfrac{7}{9}}\sin t + \tfrac{1}{3} \qquad z = -\sqrt{\tfrac{7}{12}}\cos t - \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{7}{9}}\sin t + \tfrac{1}{3}$$

1.5 Đạo hàm của hàm véc tơ

1.5.1 Đạo hàm

Theo định nghĩa, nếu **r**(t) = ⟨x(t), y(t), z(t)⟩ thì **r**'(t) = ⟨x'(t), y'(t), z'(t)⟩, nghĩa là lấy đạo hàm của các hàm thành phần.

Nếu **r**(t) là véc tơ vị trí của một chất điểm thì **v**(t) = **r**'(t) được gọi là véc tơ vận tốc và véc tơ **a**(t) = **v**'(t) = **r**''(t) được gọi là véc tơ gia tốc của chuyển động của chất điểm.

Ví dụ 1 Cho **r**(t) = ⟨cos2t, sin3t, 4t⟩, tính độ lớn của các véc tơ **r**'(t) và **r**''(t) tại t = 0.

Lời giải **r**'(t) = ⟨–2sin2t, 3cos3t, 4⟩ |**r**'(0)| = |⟨0, 3, 4⟩| = $\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

r''(t) = ⟨–4cos2t, –9sin3t, 0⟩ |**r**''(0)| = |⟨–4, 0, 0⟩| = 4

Ví dụ 2 Chứng minh $\frac{d}{dt}[\mathbf{u}(t) + \mathbf{v}(t)] = \mathbf{u}'(t) + \mathbf{v}'(t)$

Lời giải Đặt **w**(t) = **u**(t) + **v**(t) thì

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{u}(t)+\mathbf{v}(t)] = \frac{d\mathbf{w}}{dt} = \lim_{h\to 0}\frac{\mathbf{w}(\mathrm{t+h})-\mathbf{w}(\mathrm{t})}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{[\mathbf{u}(\mathrm{t+h})+\mathbf{v}(\mathrm{t+h})]-[\mathbf{u}(\mathrm{t})+\mathbf{v}(t)]}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{\mathbf{u}(\mathrm{t+h})-\mathbf{u}(\mathrm{t})}{h} - \lim_{h\to 0}\frac{\mathbf{v}(\mathrm{t+h})-\mathbf{v}(\mathrm{t})}{h} = \mathbf{u}'(t)+\mathbf{v}'(t)$$

Ví dụ 3 Sử dụng công thức $\frac{d}{dt}[\mathbf{u}(t)\cdot\mathbf{v}(t)] = \mathbf{u}'(t)\cdot\mathbf{v}(\mathrm{t}) + \mathbf{u}(\mathrm{t})\cdot\mathbf{v}'(t)$, tìm đạo hàm của

$\mathrm{f(t) = 1 + sintcos2t + sin3tcost}$

Lời giải $\mathrm{f(t) = 1 + sintcos2t + sin3tcost} = \langle 1, \mathrm{sint}, \mathrm{sin3t}\rangle\cdot\langle 1, \mathrm{cos2t}, \mathrm{cost}\rangle = \mathbf{u}(\mathrm{t})\cdot\mathbf{v}(\mathrm{t})$

Vì $\mathbf{u}'(\mathrm{t}) = \langle 0, \mathrm{cost}, \mathrm{3cos3t}\rangle$ và $\mathbf{v}'(\mathrm{t}) = \langle 0, -\mathrm{2sin2t}, -\mathrm{sint}\rangle$ nên

$\mathrm{f'(t) = costcos2t + 3cos3tcost - 2sintsin2t - sin3tsint}$

Ví dụ 4 Sử dụng công thức $\frac{d}{dt}[\mathbf{u}(t)\times\mathbf{v}(t)] = \mathbf{u}'(t)\times\mathbf{v}(\mathrm{t}) + \mathbf{u}(\mathrm{t})\times\mathbf{v}'(t)$ tìm đạo hàm của $\mathbf{u}(\mathrm{t})\times\mathbf{v}(\mathrm{t})$ với $\mathbf{u}(\mathrm{t}) = \langle \mathrm{sin2t}, \mathrm{cos2t}, 1\rangle$ và $\mathbf{v}(\mathrm{t}) = \langle \mathrm{cos2t}, \mathrm{sin2t}, 1\rangle$

Lời giải $\mathbf{u}'(\mathrm{t}) = \langle \mathrm{2cos2t}, -\mathrm{2sin2t}, 0\rangle$ và $\mathbf{v}'(\mathrm{t}) = \langle -\mathrm{2sin2t}, \mathrm{2cos2t}, 0\rangle$

$\mathbf{u}'(\mathrm{t})\times\mathbf{v}(\mathrm{t}) = \langle -\mathrm{2sin2t}, -\mathrm{2cos2t}, \mathrm{4cos2tsin2t}\rangle$

$\mathbf{u}(\mathrm{t})\times\mathbf{v}'(\mathrm{t}) = \langle -\mathrm{2cos2t}, -\mathrm{2sin2t}, \mathrm{4cos2tsin2t}\rangle$

$\frac{d}{dt}[\mathbf{u}(t)\times\mathbf{v}(t)] = \langle -2\sin 2t - 2\cos 2t, -2\cos 2t - 2\sin 2t, 8\cos 2t\sin 2t\rangle$

1.5.2 Véc tơ tiếp tuyến và đường tiếp tuyến

–Phải biết điểm $P_0(x_0, y_0, z_0)$ thuộc đồ thị của hàm véc tơ $\mathbf{r}(t)$ mà tiếp tuyến đi qua, xác định giá trị t_0 tương ứng với điểm P_0.

–Véc tơ tiếp tuyến: Tính đạo hàm $\mathbf{r}'(t)$ tại điểm P_0, tức là véc tơ $\mathbf{r}'(t_0)$.

–Phương trình véc tơ của đường tiếp tuyến: $\mathbf{v}(t) = \langle x_0, y_0, z_0\rangle + t\,\mathbf{r}'(t_0)$

Ví dụ 5 Cho $\mathbf{r}(t) = \langle e^{-2t}, \sin t, \cos t\rangle$. Tìm véc tơ tiếp tuyến đơn vị và phương trình véc tơ của đường tiếp tuyến tại điểm (1, 0, 1).

Lời giải $\mathbf{r}'(t) = \langle -2e^{-2t}, \cos t, -\sin t\rangle$. Điểm (1, 0, 1) ứng với t = 0.

Vì $\mathbf{r}'(0) = \langle -2, 1, 0\rangle$ nên véc tơ tiếp tuyến đơn vị tại t = 0 là $\mathbf{T}(0) = \mathbf{r}'(0)/|\mathbf{r}'(0)| = \frac{1}{\sqrt{5}}\langle -2,1,0\rangle$

Đường tiếp tuyến đi qua điểm (1, 0, 1) và song song với véc tơ tiếp tuyến $\mathbf{T}(0)$ nên có phương trình véc tơ là $\mathbf{v}(\mathrm{t}) = \langle 1, 0, 1\rangle + \mathrm{t}\langle -2, 1, 0\rangle = \langle 1 - 2\mathrm{t}, \mathrm{t}, 1\rangle$.

Ví dụ 6 Cho $\boldsymbol{r}(t) = \langle \sin 2t\cos 3t, \sin 2t\sin 3t, \cos 2t\rangle$. Tìm véc tơ tiếp tuyến đơn vị và phương trình véc tơ của đường tiếp tuyến tại điểm ứng với t_0 bất kỳ.

Lời giải

$x(t) = \sin 2t\cos 3t = \frac{1}{2}(\sin 5t - \sin t) \Rightarrow x'(t) = \frac{1}{2}(5\cos 5t - \cos t)$

$y(t) = \sin 2t\sin 3t = \frac{1}{2}(\cos t - \cos 5t) \Rightarrow y'(t) = \frac{1}{2}(5\sin 5t - \sin t)$

$z(t) = \cos 2t \Rightarrow z'(t) = -2\sin 2t$

$|\mathbf{r}'(t)|^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$

$= \frac{1}{4}(5\cos 5t - \cos t)^2 + \frac{1}{4}(5\sin 5t - \sin t)^2 + 4\sin^2 2t = 4 + 9\sin^2 2t$

Véc tơ tiếp tuyến đơn vị tại t_0 là

$$\mathbf{T}(t_0) = \frac{1}{2\sqrt{4+9\sin^2 2t_0}}\langle 5\cos 5t_0 - \cos t_0, 5\sin 5t_0 - \sin t_0, -4\sin 2t_0\rangle$$

Phương trình đường tiếp tuyến là

$$\mathbf{v}(t) = \left\langle \tfrac{1}{2}(\sin 5t_0 - \sin t_0), \tfrac{1}{2}(\cos t_0 - \cos 5t_0), \cos 2t_0 \right\rangle$$
$$+\, t\langle 5\cos 5t_0 - \cos t_0\,, 5\sin 5t_0 - \sin t_0\,, -4\sin 2t_0\rangle$$

1.6 Tích phân của hàm véc tơ

Ví dụ 1 Tìm R(t) = $\int \mathbf{r}(t)dt$ với $\mathbf{r}(t) = \left\langle te^{2t}, \frac{1}{1+t^2}, \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \right\rangle$

Lời giải Ta tính tích phân của các hàm thành phần.

$$\int x(t)dt = \int te^{2t}dt = \tfrac{1}{2}\int t de^{2t} = \tfrac{1}{2}\left(te^{2t} - \int e^{2t}dt\right) = \tfrac{1}{2}\left(te^{2t} - \tfrac{1}{2}\, e^{2t}\right)$$

$$\int y(t)dt = \int \frac{dt}{1+t^2} = \operatorname{atan} t \qquad \int z(t)dt = \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \operatorname{asin} t$$

Vậy $\mathbf{R}(t) = \left\langle \frac{1}{2}\left(te^{2t} - \frac{1}{2}\, e^{2t}\right), \operatorname{atan} t\,, \operatorname{asin} t \right\rangle + \mathbf{C}$

Ví dụ 2 Tính $\mathbf{I} = \int_0^1 \left\langle te^{2t}, \frac{1}{1+t^2}, \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \right\rangle dt$

Lời giải Theo Ví dụ 1, véc tơ nguyên hàm của $\left\langle te^{2t}, \frac{1}{1+t^2}, \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \right\rangle$ là

$$\mathbf{R}(t) = \left\langle \frac{1}{2}\left(te^{2t} - \frac{1}{2}\, e^{2t}\right), \operatorname{atan} t\,, \operatorname{asin} t \right\rangle$$

Vậy $$\mathbf{I} = \mathbf{R}(1) - \mathbf{R}(0) = \left\langle \frac{1}{4}\,(e^2+1),\ \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$$

1.7 Độ dài và độ cong

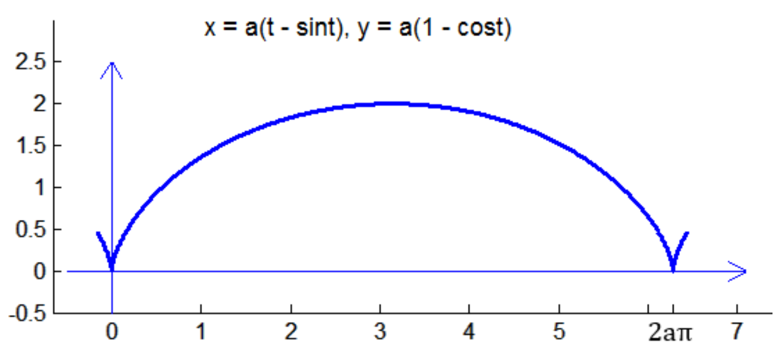
Độ dài một cung thuộc đồ thị của hàm véc tơ **r**(t) ừng với t ∈ [a, b] là $s = \int_a^b |\mathbf{r}'(t)|dt$

Tham số hóa lại theo độ dài cung: Tính $s(t) = \int_0^t |\mathbf{r}'(t)|dt$, sau đó giải ra t = t(s), thế trở lại vào x(t), y(t) và z(t) được x = x(s), y = y(s) và z = z(s).

Độ cong được tính theo công thức $\kappa = \frac{|\mathbf{T}'|}{|\mathbf{r}'|} = \frac{|\mathbf{r}'\times\mathbf{r}''|}{|\mathbf{r}'|^3} = \frac{|x'y''-x''y'|}{[x'^2+y'^2]^{3/2}}$

Ví dụ 1 Tính độ dài một nhịp đường cycloid x = a(t – sint), y = a(1 – cost).

Lời giải Ta có thể xét nhịp ứng với t ∈ [0, 2π].



Ta có x' = a(1 – cost), y' = asint nên

$$|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{x'^2 + y'^2} = a\sqrt{a^2(1-\cos t)^2 + a^2\sin^2 t} = 2a\sqrt{\sin^2\frac{t}{2}} = 2a\left|\sin\frac{t}{2}\right|$$

Với t ∈ [0, 2π] thì $\sin\frac{t}{2} \geq 0$ nên $|\mathbf{r}'(t)| = 2\operatorname{a}\sin\frac{t}{2}$.

Vậy độ dài cần tìm là

$$s = 2a\int_0^{2\pi} \sin\frac{t}{2}dt = -4a\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi} = -4a(-1-1) = 8a$$

Ví dụ 2 Tính độ dài một chu kỳ đường astroid $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$

Lời giải Đường cong trên được tham số hóa bằng cách đặt

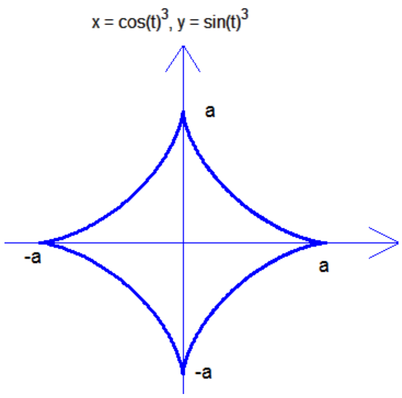
$$x = a\cos^3 t \qquad y = a\sin^3 t$$

Do tính đối xứng, ta chỉ tính độ dài ứng với t ∈ [0, π/2] rồi nhân với 4.

Ta có $x' = -3\,a\cos^2 t\sin t$, $y' = 3a\sin^2 t\cos t$ nên

$$x'^2 + y'^2 = 9a^2\cos^2 t\sin^2 t = \frac{9}{4}\,a^2\sin^2 2t$$

Vậy độ dài là $s = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{3}{2}\,a\sin 2t\,dt = -3a\cos 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 6a$



Ví dụ 3 Tính độ dài cung thuộc đường cong $y = x^2$ ứng với x ∈ [0, t].

Lời giải Xem x là tham số, phương trình tham số là $x = x \quad y = x^2$.

Vì $x' = 1$, $y' = 2x$ nên $x'^2 + y'^2 = 1 + 4x^2$. Do đó độ dài cung là

$$s = \int_0^t \sqrt{1+4x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^t \sqrt{1+(2x)^2}\,d(2x)$$

Vì $\int \sqrt{1+u^2}\,du = \frac{1}{2}\left[u\sqrt{1+u^2} + \ln\left(u+\sqrt{1+u^2}\right)\right] + C$, nên

$$s = \frac{1}{4}\left[u\sqrt{1+u^2} + \ln\left(u+\sqrt{1+u^2}\right)\right]_0^t = \frac{1}{4}\left[t\sqrt{1+t^2} + \ln\left(t+\sqrt{1+t^2}\right)\right]$$

Ví dụ 4 Giả sử C là giao của mặt trụ parabol $x^2 = 2y$ với mặt $3z = xy$. Tính độ dài cung thuộc C tính từ gốc tọa độ đến điểm (6, 18, 36).

Lời giải Sử dụng x như là tham số, vậy phương trình tham số của đường cong là

$$x = x \qquad y = \frac{1}{2}\,x^2 \qquad z = \frac{1}{6}\,x^3$$

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1 + x^2 + \frac{1}{4}x^4 = \frac{1}{4}(4+5x^2)$$

$$s = \frac{1}{2}\int_0^6 \sqrt{4+5x^2}\,dx = \frac{1}{2\sqrt{5}}\int_0^6 \sqrt{2^2 + \left(\sqrt{5}x\right)^2}\,d\left(\sqrt{5}x\right)$$

Vì $\int \sqrt{a^2+u^2}\,du = \frac{1}{2}\left[u\sqrt{a^2+u^2} + a^2\ln\left(u+\sqrt{a^2+u^2}\right)\right] + C$ nên

$$s = \frac{1}{4\sqrt{5}}\left[\sqrt{5}x\sqrt{4+5x^2} + 4\,ln\left(\sqrt{5}x + \sqrt{4+5x^2}\right)\right]_0^6$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{5}}\left[6\sqrt{5}\sqrt{184} + 4\,ln\left(6\sqrt{5}+\sqrt{184}\right) - 4ln2\right]$$

Ví dụ 5 Tham số hóa lại đường cong $\mathbf{r}(t) = 2t\,\mathbf{i} + (1-3t)\,\mathbf{j} + (5+4t)\,\mathbf{k}$

Lời giải Phương trình tham số là $x = 2t,\ y = 1 - 3t,\ z = 5 + 4t$

Ta có $x'^2 + y'^2 + z'^2 = 4 + 9 + 16 = 29$, nên độ dài tính từ t = 0 đến t là

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{29}\,dt = \sqrt{29}t$$

Do đó $t(s) = s/\sqrt{29}$. Phương trình tham số theo độ dài cung là

$x(s) = \frac{2s}{\sqrt{29}}$ $y(s) = 1 - \frac{3s}{\sqrt{29}}$ $z(s) = 5 + \frac{4s}{\sqrt{29}}$

Ví dụ 6 Tham số hóa lại đường cong $\mathbf{r}(t) = e^{2t}\cos 2t\,\mathbf{i} + 2\,\mathbf{j} + e^{2t}\sin 2t\,\mathbf{k}$

Lời giải Phương trình tham số là $x = e^{2t}\cos 2t, y = 2, z = e^{2t}\sin 2t$

Ta có $x'^2 + y'^2 + z'^2 = e^{4t}(2\cos 2t - 2\sin 2t)^2 + e^{4t}(2\sin 2t + 2\cos 2t)^2 = 8e^{2t}$

Do đó độ dài đường cong tính từ t = 0 đến t là

$$s(t) = 8\int_0^t e^{2t}dt = 4\int_0^t e^{2t}d2t = 4(e^{2t} - 1)$$

Vì vậy $e^{2t} = 1 + \frac{s}{4}, t = \frac{1}{2}\ln\left(1 + \frac{s}{4}\right)$. Phương trình tham số theo độ dài cung là

$$x(s) = \left(1 + \frac{s}{4}\right)\cos\ln\left(1 + \frac{s}{4}\right), y = 2, z = \left(1 + \frac{s}{4}\right)\sin\ln\left(1 + \frac{s}{4}\right)$$

Ví dụ 7 Tính độ cong của $\mathbf{r}(t) = \langle a\cos\omega t, b\sin\omega t\rangle$ tại điểm ứng với t bất kỳ.

Lời giải $x' = -a\omega\sin\omega t, x'' = -a\omega^2\cos\omega t$

$y' = b\omega\cos\omega t, y'' = -b\omega^2\sin\omega t$

$|x'y'' - x''y'| = |ab\omega^3\sin^2\omega t + ab\omega^3\cos^2\omega t| = ab\omega^3$

$x'^2 + y'^2 = \omega^2(a^2\sin^2\omega t + b^2\cos^2\omega t) = \omega^2[a^2 + (b^2 - a^2)\cos^2\omega t]$

$$\kappa = \frac{ab\omega^3}{\omega^3[a^2 + (b^2 - a^2)\cos^2\omega t]^{3/2}} = \frac{ab}{[a^2 + (b^2 - a^2)\cos^2\omega t]^{3/2}}$$

Ví dụ 8 Tính độ cong của $\mathbf{r}(t) = \langle a\cos t, a\sin t, bt\rangle$ tại điểm ứng với t bất kỳ.

Lời giải $\mathbf{r}' = \langle -a\sin t, a\cos t, b\rangle, \mathbf{r}'' = \langle -a\cos t, -a\sin t, 0\rangle$

$$\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'' = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -a\sin t & a\cos t & b \\ -a\cos t & -a\sin t & 0 \end{vmatrix} = \langle ab\sin t, -ab\cos t, a^2\rangle$$

$|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''| = \sqrt{a^2b^2 + a^4} = a\sqrt{b^2 + a^2}$ $|\mathbf{r}'| = \sqrt{a^2 + b^2}$

$$\kappa = \frac{a\sqrt{b^2 + a^2}}{\left(\sqrt{b^2 + a^2}\right)^3} = \frac{a}{a^2 + b^2}$$

1.8 Mặt phẳng pháp diện và mặt phẳng mật tiếp

Mặt phẳng pháp diện: nhận véc tơ tiếp tuyến **T** của đường cong làm véc tơ pháp tuyến

Mặt phẳng mật tiếp: nhận véc tơ $\mathbf{B} = \mathbf{T} \times \mathbf{N}$ làm véc tơ pháp tuyến

Ví dụ 1 Tìm phương trình của mặt phẳng pháp diện và mặt phẳng mật tiếp của đường cong $\mathbf{r}(t) = \langle a\cos t, a\sin t, bt\rangle$ tại điểm ứng với $t = \pi/2$.

Lời giải $\mathbf{r}(\pi/2) = \langle 0, a, b\pi/2\rangle, \mathbf{r}'(t) = \langle -a\sin t, a\cos t, b\rangle$

$\mathbf{r}'(\pi/2) = \langle -a, 0, b\rangle$, $|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{a^2 + b^2}$

$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} = \frac{\langle -a\sin t, a\cos t, b\rangle}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ $\mathbf{T}(\pi/2) = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}\langle -a, 0, b\rangle$

Phương trình pháp diện đi qua điểm $(0, a, b\pi/2)$ và vuông góc với véc tơ $\langle -a, 0, b\rangle$ là

$-a(x - 0) + 0(y - a) + b(z - b\pi/2) = 0$, hay $2ax - 2bz + b^2\pi = 0$

$\mathbf{T}'(t) = \frac{\langle -a\cos t, -a\sin t, 0\rangle}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ $\mathbf{T}'(\pi/2) = \frac{\langle 0, -a, 0\rangle}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ $\mathbf{N}(\pi/2) = \langle 0, -1, 0\rangle$

$\mathbf{B}(\pi/2) = \mathbf{T}(\pi/2) \times \mathbf{N}(\pi/2) = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\langle b, 0, a\rangle$

Phương trình mặt mật tiếp đi qua điểm $(0, a, b\pi/2)$ và vuông góc với véc tơ $\langle b, 0, a\rangle$ là

$$b(x - 0) + 0(y - a) + a(z - b\pi/2) = 0, \text{ hay } 2bx + 2az - ab\pi = 0$$

Ví dụ 2 Tìm các phương trình mặt phẳng pháp diện và mặt phẳng mật tiếp của đường cong là giao của các mặt trụ parabola $x = y^2$ và $z = x^2$ tại điểm $(1, 1, 1)$.

Xem y như là tham số, phương trình tham số của đường cong là: $\mathbf{r}(y) = \langle y^2, y, y^4\rangle$.

$\mathbf{r}'(y) = \langle 2y, 1, 4y^3\rangle \Rightarrow \mathbf{r}'(1) = \langle 2, 1, 4\rangle$. Có thể lấy $\mathbf{r}'(1)$ làm véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng pháp diện đi qua điểm $(1, 1, 1)$, vì thế phương trình mặt pháp diện là:

$$2(x - 1) + (y - 1) + 4(z - 1) = 0 \text{ hay } 2x + y + 4z - 7 = 0.$$

$$\mathbf{T}(y) = \frac{\langle 2y, 1{,}4y^3\rangle}{\sqrt{4y^2 + 1 + 16y^6}} \qquad \mathbf{T}'(y) = \frac{\langle 2{,}0{,}12y^2\rangle}{\sqrt{4y^2 + 1 + 16y^6}} - \frac{8y + 96y^5}{2(4y^2 + 1 + 16y^6)^{\frac{3}{2}}}\langle 2y, 1{,}4y^3\rangle$$

$$\mathbf{T}'(1) = \frac{\langle 2{,}0{,}12\rangle}{\sqrt{21}} - \frac{52}{21\sqrt{21}}\langle 2{,}1{,}4\rangle = \frac{1}{21\sqrt{21}}(21\langle 2{,}0{,}12\rangle - 52\langle 2{,}1{,}4\rangle) = \frac{2}{21\sqrt{21}}\langle -31, -26{,}22\rangle$$

Mặt phẳng mật tiếp được sinh bởi các véc tơ **T** và **N**, và vì thế cũng có thể xem là được sinh bởi các véc tơ **r**' và **T**' vì $\mathbf{T} = \mathbf{r}'/|\mathbf{r}'|$ và $\mathbf{N} = \mathbf{T}'/|\mathbf{T}'|$, cụ thể hơn, có thể lấy các véc tơ thay thế là

$\langle 2, 1, 4\rangle$ và $\langle -31, -26, 22\rangle$. Ta có $\langle 2, 1, 4\rangle \times \langle -31, -26, 22\rangle = \langle 126, -168, -21\rangle$

Vậy phương trình mặt phẳng mật tiếp tại điểm $(1, 1, 1)$ là

$$126(x - 1) - 168(y - 1) - 21(z - 1) = 0, \text{ hay } 126x - 168y - 21z + 63 = 0$$

1.9 Các bài tập về chuyển động

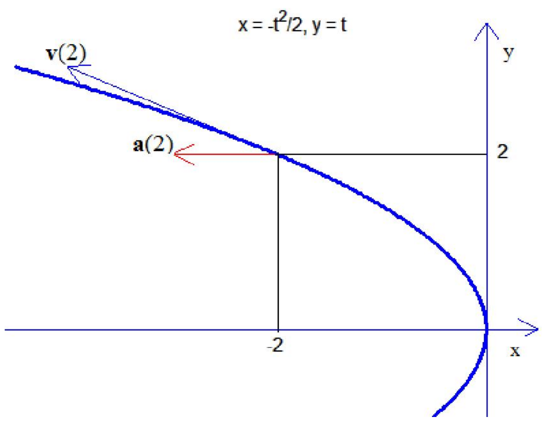
Ví dụ 1 Tìm các véc tơ vận tốc, gia tốc và tốc độ của chất điểm được cho bởi hàm vị trí

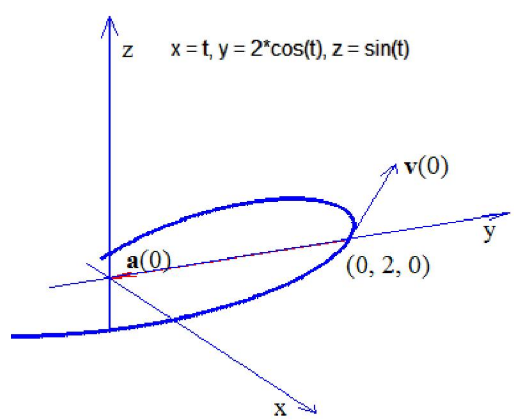
$$\mathbf{r}(t) = \langle -\tfrac{1}{2}t^2, t\rangle.$$

Phác họa đường đi của chất điểm và vẽ các véc tơ vận tốc và gia tốc tại giá trị $t = 2$.

Lời giải $\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = \langle -t, 1\rangle$, $\mathbf{a}(t) = \mathbf{r}''(t) = \langle -1, 0\rangle$, $|\mathbf{v}(t)| = (t^2 + 1)^{1/2}$.

Tại $t = 2$: $\mathbf{v}(2) = \langle -2, 1\rangle$, $\mathbf{a}(2) = \langle -1, 0\rangle$, $|\mathbf{v}(2)| = 5^{1/2}$





Ví dụ 2 Tìm các véc tơ vận tốc, gia tốc và tốc độ của chất điểm được cho bởi hàm vị trí

$$\mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{i} + 2\cos t\,\mathbf{j} + \sin t\,\mathbf{k}.$$

Phác họa đường đi của chất điểm và vẽ các véc tơ vận tốc và gia tốc tại giá trị $t = 0$.

Lời giải Ta viết lại dưới dạng $\mathbf{r}(t) = \langle t, 2\cos t, \sin t\rangle$

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = \langle 1, -2\sin t, \cos t\rangle \qquad \mathbf{a}(t) = \mathbf{v}'(t) = \langle 0, -2\cos t, -\sin t\rangle$$

$$|\mathbf{v}(t)| = \sqrt{1 + 4\sin^2 t + \cos^2 t} = \sqrt{2 + 3\sin^2 t}$$

$\mathbf{v}(0) = \langle 1, 0, 1\rangle$, $\mathbf{a}(0) = \langle 0, -2, 0\rangle$, $|\mathbf{v}(0)| = \sqrt{2}$

Ví dụ 3 Tìm véc tơ vận tốc và véc tơ vị trí của chất điểm, biết véc tơ gia tốc và các giá trị đầu của vận tốc và vị trí: $\mathbf{a}(t) = 2\,\mathbf{i} + 6t\,\mathbf{j} + 12t^2\,\mathbf{k}$, $\mathbf{v}(0) = \mathbf{i}$, $\mathbf{r}(0) = \mathbf{j} - \mathbf{k}$.

Lời giải $\mathbf{v}(t) = \int (2\,\mathbf{i} + 6t\,\mathbf{j} + 12t^2\,\mathbf{k})dt = 2t\,\mathbf{i} + 3t^2\,\mathbf{j} + 4t^3\,\mathbf{k} + \mathbf{C}$

Vì $\mathbf{v}(0) = \mathbf{i}$ nên $\mathbf{C} = \mathbf{i}$, do đó $\mathbf{v}(t) = (2t+1)\,\mathbf{i} + 3t^2\,\mathbf{j} + 4t^3\,\mathbf{k}$

$\mathbf{r}(t) = \int [(2t+1)\mathbf{i} + 3t^2\,\mathbf{j} + 4t^3\,\mathbf{k}]dt = (t^2+t)\mathbf{i} + t^3\,\mathbf{j} + t^4\,\mathbf{k} + \boldsymbol{D}$

Vì $\mathbf{r}(0) = \mathbf{j} - \mathbf{k}$ nên $\mathbf{D} = \mathbf{j} - \mathbf{k}$, do đó $\mathbf{r}(t) = (t^2+t)\mathbf{i} + (t^3+1)\,\mathbf{j} + (t^4-1)\,\mathbf{k}$

Ví dụ 4 Một viên đạn được bắn ra từ vị trí cách mặt đất *h* (m), góc nghiêng α (rad), vận tốc v_0 (m/s).

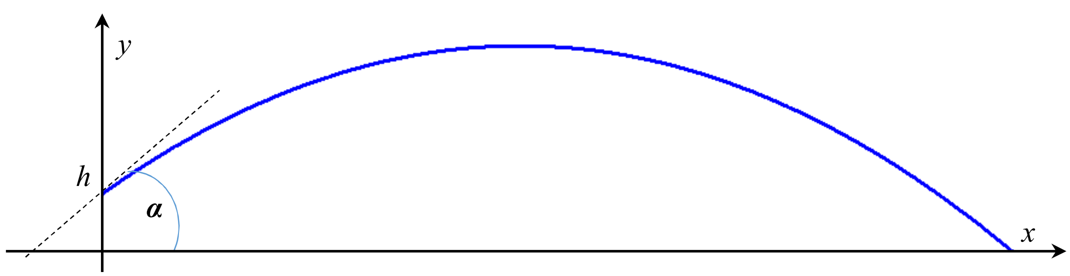
(a) Xác định véc tơ vị trí **r**(t) của viên đạn

(b) Với h = 0, xác định góc α để viên đạn đi xa nhất

(c) Xác định góc α để viên đạn đạt độ cao nhất

(d) Xác định góc α để viên đạn bắn trúng mục tiêu cách điểm bắn một khoảng bằng $\bar{x}$

Lời giải Chọn hệ tọa độ sao cho trục hoành theo phương nằm ngang và có hướng dương theo chiều rơi của viên đạn, đầu nòng súng nằm trên trục tung và có tung độ bằng h.



Ta có véc tơ vận tốc ban đầu $\mathbf{v}_0 = \langle v_0 \cos\alpha, v_0 \sin\alpha\rangle$. Vì chỉ có lực trọng trường tác động lên đầu đạn nên véc tơ gia tốc của nó là $\mathbf{a} = \langle 0, -g\rangle$. Do đó véc tơ vận tốc là $\mathbf{v}(t) = \int \mathrm{a}dt = \langle 0, -gt\rangle + \mathbf{C}$

Vì véc tơ vận tốc ban đầu là $\mathbf{v}_0$ nên $\mathbf{C} = \mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0$, vậy $\mathbf{v}(t) = \langle v_0\cos\alpha, v_0\sin\alpha - gt\rangle$

Ta có $\mathbf{r}(t) = \int \mathbf{v}(t)dt = \langle (v_0\cos\alpha)\,t, (v_0\sin\alpha)\,t - gt^2/2\rangle + \mathrm{D}$

Vì $\mathbf{r}(0) = \langle 0, h\rangle$ nên $\mathbf{D} = \langle 0, h\rangle$. Vậy véc tơ vị trí là

$$\mathbf{r}(t) = \langle (v_0\cos\alpha)t, h + (v_0\sin\alpha)t - \tfrac{1}{2}gt^2\rangle$$

Phương trình tham số là $x = (v_0\cos\alpha)t \quad y = h + (v_0\sin\alpha)t - \frac{1}{2}gt^2$

(b) Thời điểm viên đạn chạm mặt đất là y = 0, hay $gt^2 - 2(v_0\sin\alpha)t = 0$

$t = (2v_0\sin\alpha)/g$. Thay vào x ta được $x = (v_0^2\, 2\cos\alpha\sin\alpha)/g = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\alpha$

Để viên đạn đi xa nhất thì sin2α = 1 hay α = π/4.

(c) Viên đạn đạt độ cao nhất tương ứng với y lớn nhất.

Ta có y' $= v_0\sin\alpha - gt = 0$ khi $t = (v_0\sin\alpha)/g$. Thay vào y ta được

$$y = h + \frac{(v_0\sin\alpha)^2}{g} - \frac{1}{2}\frac{(v_0\sin\alpha)^2}{g} = \frac{1}{2}\frac{(v_0\sin\alpha)^2}{g}$$

Để y lớn nhất thì sinα = 1, hay α = π/2.

(d) Để bắn trúng mục tiêu cách $\bar{x}$ (m) thì x = $\bar{x}$, tức là $\frac{v_0^2}{g}\sin 2\alpha = \bar{x}$, hay $\sin 2\alpha = \frac{g\bar{x}}{v_0^2}$

Giải ra ta nhận được hai nghiệm: $\alpha = \frac{1}{2}\arcsin\frac{g\bar{x}}{v_0^2}$, $\alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\arcsin\frac{g\bar{x}}{v_0^2}$