2.1. Hàm nhiều biến

2.1.1. Tìm miền xác định của hàm hai biến z = f(x, y)

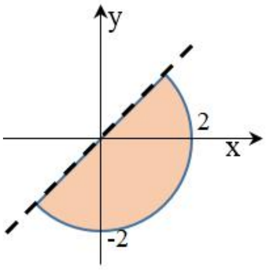
Miền xác định của f là tập các điểm (x, y) ∈ $\mathbb{R}^2$ sao cho biểu thức f(x, y) có nghĩa. Thường được xác định bởi một số các bất phương trình dạng $g_1(x, y) \geq 0$, $g_2(x, y) > 0$, ...

Mỗi phương trình dạng $g_k(x, y) = 0$ xác định một đường cong, đường cong này chia mặt phẳng thành 2 phần. Một phần sẽ có $g_k(x, y) > 0$, phần còn lại sẽ có $g_k(x, y) < 0$. Việc xác định dấu của biểu thức $g_k(x, y)$ trên một miền rất đơn giản bằng cách kiểm tra trực tiếp tại một điểm (x, y).

Sau khi đã xác định được tất cả các miền thích hợp, ta chỉ việc lấy giao của chúng và chú ý rằng các điểm nằm trên đường cong $g_1(x, y) = 0$ sẽ được lấy còn trên $g_2(x, y) = 0$ thì không.

Ví dụ 1 Tìm miền xác định của $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x-y}} + \sqrt{4 - x^2 - y^2}$

Lời giải $D = \{(x, y) \mid 4 - x^2 - y^2 \geq 0, x - y > 0\}$



Xét $g_1(x, y) = 4 - x^2 - y^2 = 0$ hay $x^2 + y^2 = 2^2$, đây là phương trình đường tròn tâm tại gốc tọa độ và bán kính bằng 2. Ta có $g_1(0, 0) = 4 > 0$ nên ta lấy miền phía trong đường tròn.

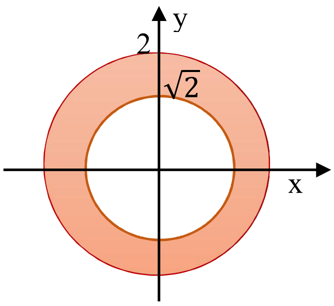
Xét $g_2(x, y) = x - y = 0$ hay y = x, đây là phương trình đường thẳng đi qua gốc tọa độ. Ta có $g_2(0, 1) = -1 < 0$ nên ta lấy miền nằm phía dưới đường thẳng.

Kết hợp lại ta được nửa hình tròn phía dưới, không tính các điểm thuộc đường thẳng.

Ví dụ 2 Tìm miền xác định của $f(x, y) = \arccos(x^2 + y^2 - 3)$

Lời giải Vì miền xác định của hàm arccos(x) trong đoạn [-1, 1] nên miền xác định của hàm f là $D = \{(x, y) \mid -1 \leq x^2 + y^2 - 3 \leq 1\}$, hay

$D = \{(x, y) \mid 2 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$



Xét $g_1(x, y) = x^2 + y^2 - 2 = 0$ hay $x^2 + y^2 = 2$, đây là phương trình đường tròn tâm tại gốc tọa độ và bán kính bằng $\sqrt{2}$.

Ta có $g_1(0, 0) = 2 < 0$ nên ta lấy miền phía ngoài đường tròn này.

Xét $g_2(x, y) = 4 - x^2 - y^2 = 0$ hay $x^2 + y^2 = 2^2$, đây là phương trình đường tròn tâm tại gốc tọa độ và bán kính bằng 2.

Ta có $g_2(0, 0) = 4 > 0$ nên ta lấy miền phía trong đường tròn này.

Kết hợp lại ta được hình vành khăn.

2.1.2. Vẽ đồ thị của hàm hai biến z = f(x, y)

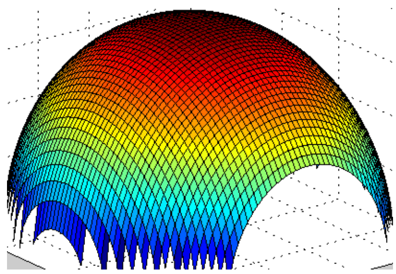
Sử dụng hàm ezsurf() hoặc surf() trong MATLAB để vẽ đồ thị của hàm hai biến z = f(x, y) trong miền xác định [a, b]×[c, d].

Ví dụ 1 Vẽ đồ thị của hàm $z = \sqrt{4 - 2x^2 + 3y^2}$.

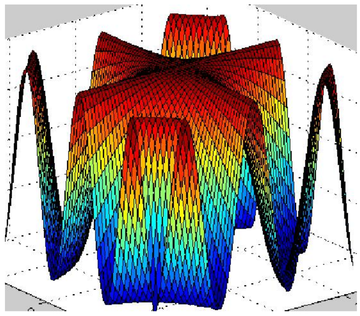
-Dùng hàm ezsurf(): `ezsurf('sqrt(4 - 2*x^2 - 3*y^2)')`

-Dùng hàm surf():

```
x = -2 : .1 : 2; y = -3 : .1 : 3;
[X, Y] = meshgrid(x, y);
Z = sqrt(4 - 2*X.^2 - 3*Y.^2);
surf(X, Y, Z);
```



Ví dụ 2 Vẽ đồ thị hàm z = cos(xy).



-Dùng hàm ezsurf(): `ezsurf('cos(x*y)',[-3 3 -3 3])`

-Dùng hàm surf():

```
x = -3 : .1 : 3; y = x;
[X, Y] = meshgrid(x, y);
Z = cos(X.*Y);
surf(X, Y, Z);
```

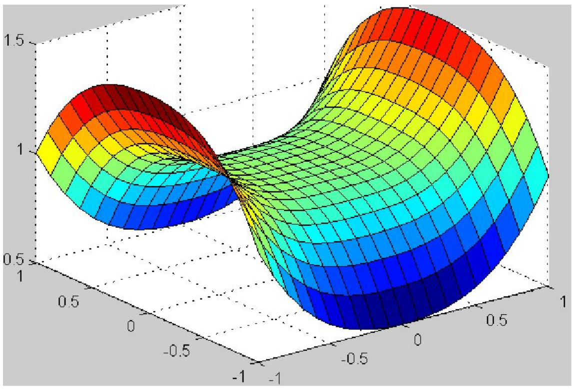
2.1.3. Bản đồ đường mức

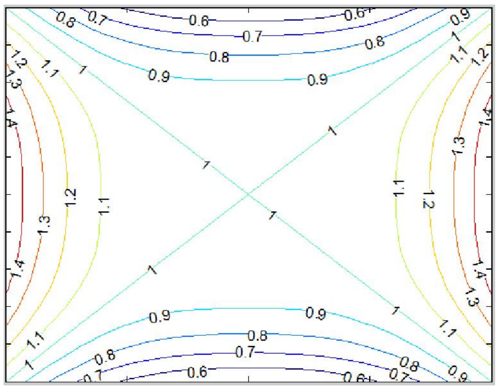
Sử dụng hàm contour() để vẽ bản đồ đường mức.

Ví dụ 1 Vẽ đồ thị và bản đồ đường mức của $z = 1 + \frac{x^4 - y^4}{1 + x^2 + y^2}$

Lời giải

```
x = -1:.1:1; y = x; [X Y] = meshgrid(x,y);
Z = 1 + (X.^4 - Y.^4)./(1+X.^2+Y.^2);
surf(X, Y, Z);
[C, h] = contout(X, Y, Z);  % Vẽ bản đồ đường mức
set(h,'ShowText','on');     % Hiển thị nhãn
```

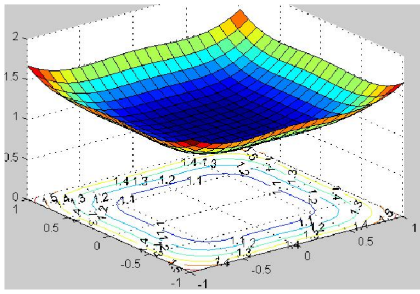




Ví dụ 2 Vẽ đồ thị và bản đồ đường mức của $z = 1 + \frac{x^4 + y^4}{1 + x^2 + y^2}$ trên cùng một hình.

Lời giải

```
x = -1:.1:1; y = x; [X Y] = meshgrid(x,y);
Z = 1 + (X.^4 + Y.^4)./(1+X.^2+Y.^2);
surf(X, Y, Z);                % Vẽ đồ thị
hold on                       % Giữ hình vẽ trước
[C, h] = contout(X, Y, Z);    % Vẽ bản đồ đường mức
set(h,'ShowText','on');       % Hiển thị nhãn
```



2.2. Giới hạn và sự liên tục

2.2.1. Tìm giới hạn của hàm hai biến f(x, y) khi (x, y) → (a, b)

a) Cách 1. Tìm giới hạn theo định nghĩa:

- Bằng kinh nghiệm, dự đoán giới hạn là L.
- Với ε > 0, xuất phát từ bất đẳng thức $|f(x,y) - L| < \varepsilon$, ta biến đổi tương đương hoặc tìm điều kiện đủ (dạng ⇔ hoặc ⟸) để đi đến bất đẳng thức $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < B(\varepsilon)$.
- Lấy δ = B(ε). Vậy ta đã chứng minh được rằng

  ∀ ε > 0, ∃ δ = B(ε) > 0 | $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$<δ ⟹ |f(x, y) - L| < ε

  Tức là f(x, y) → L khi (x, y) → (a, b).

b) Cách 2 (khi a = b = 0). Đặt t = y/x (hay y = tx). Xét 3 khả năng của t là

- $t \to 0$ (ví dụ cho $y = x^2$, thì $t = y/x = x \to 0$)
- $t \to \infty$ (ví dụ cho $y = \sqrt{x}$, thì $t = y/x = 1/\sqrt{x} \to \infty$)
- $t \to k \neq 0, k \neq \infty$ (ví dụ y = 2x, thì $t = y/x = 2 \to 2$)

Nếu trong mọi khả năng trên mà f đều dần tới cùng một giá trị f_0 thì f_0 chính là giới hạn của f(x, y) khi (x, y) → (0, 0). Trái lại thì không có giới hạn.

c) Cách 3 (khi a = b = 0). Xét phương trình f(x, y) = k. Nếu tồn tại duy nhất một giá trị của k để phương trình có nghiệm trong lân cận đủ bé của (0, 0), thì giá trị k đó chính là giới hạn của f(x, y) khi (x, y) → (0, 0). Nếu tồn tại ít nhất hai giá trị của k để phương trình có nghiệm thì không tồn tại giới hạn của f(x, y) khi (x, y) → (0, 0).

Chú ý Bằng phép đổi biến x' = x – a, y' = y – b, khi đó việc tìm giới hạn của f(x, y) khi (x, y) → (a, b) tương đương với tìm giới hạn của g(x', y') khi (x', y') → (0, 0).

Ví dụ 1 Tìm giới hạn của $f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^2}$ khi (x, y) → (0, 0).

Lời giải

Cách 1. Ta dự đoán giới hạn này tồn tại và bằng 0 vì bậc của tử lớn hơn bậc của mẫu.

$\forall\, \varepsilon > 0,\ \left|\frac{xy^2}{x^2+y^2} - 0\right| < \varepsilon \Leftarrow |x| < \varepsilon \Leftarrow \sqrt{x^2+y^2} < \varepsilon \Leftrightarrow \sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2} < \varepsilon$

Lấy δ = ε, ta đã chứng minh được rằng

$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta = \varepsilon > 0 \mid \sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2} < \delta \Rightarrow \left|\frac{xy^2}{x^2+y^2} - 0\right| < \varepsilon$

Tức là $\frac{xy^2}{x^2+y^2} \to 0$ khi (x, y) → (0, 0).

Cách 2. Đặt t = y/x hay y = tx. Khi đó $f = \frac{x^3t^2}{x^2(1+t^2)} = \frac{xt^2}{1+t^2}$

- Khi $t \to 0$: $f = \frac{xt^2}{1+t^2} \to 0$
- Khi $t \to \infty$: Vì $\frac{t^2}{1+t^2} = \frac{1}{\frac{1}{t^2}+1} \to 1$ và $x \to 0$ nên $f = \frac{xt^2}{1+t^2} \to 0$
- Khi $t \to k$ ($\neq 0, \neq \infty$): Vì $\frac{t^2}{1+t^2} \to \frac{k^2}{1+k^2}$ và $x \to 0$ nên $f = \frac{xt^2}{1+t^2} \to 0$

Trong mọi trường hợp đều có f(x, y) → 0 nên giới hạn cần tìm là tồn tại và bằng 0.

Cách 3. Giả sử $\frac{xy^2}{x^2+y^2} = k$, khi đó $xy^2 = k(x^2+y^2) \Leftrightarrow (x-k)y^2 = kx^2$.

Nếu k ≠ 0, ta có $x^2 = \left(\frac{x}{k} - 1\right)y^2$.

Vế phải sẽ âm khi x đủ nhỏ, mâu thuẫn với vế trái dương. Chứng tỏ chỉ tồn tại duy nhất k = 0, tức là $\frac{xy^2}{x^2+y^2} \to 0$ khi (x, y) → (0, 0).

Ví dụ 2 Tìm giới hạn (nếu có) của $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ khi (x, y) → (0, 0).

Lời giải

Cách 1. Đặt t = y/x, ta có $f = \frac{x^2t}{x^2(1+t^2)} = \frac{t}{1+t^2}$.

- Khi $t \to 0$: $f \to 0$
- Khi $t \to 1$: $f \to 1/2$

Vậy không tồn tại giới hạn của $\frac{xy}{x^2+y^2}$ khi (x, y) → (0, 0).

Cách 2. Giả sử $\frac{xy}{x^2+y^2} = k \Rightarrow xy = k(x^2 + y^2) \Rightarrow kx^2 - yx + ky^2 = 0$ (*)

Ta xem (*) như là phương trình bậc 2 theo x. Khi đó

$$\Delta = y^2 - 4k^2y^2 = y^2(1 - 4k^2)$$

Để (*) có nghiệm thì $\Delta \geq 0$, tức là $1 - 4k^2 \geq 0$, hay $-\frac{1}{2} \leq k \leq \frac{1}{2}$.

Chứng tỏ có một tập các giá trị của k thỏa mãn. Vậy không tồn tại giới hạn của f khi (x, y) → (0, 0).

2.2.2. Sự liên tục của hàm hai biến

Hàm f(x, y) liên tục tại điểm (a, b) nếu các kiểm tra sau đều đúng:

a) Hàm f xác định tại (a, b), tức là tồn tại f(a, b)

b) Có giới hạn: f(x, y) → L khi (x, y) → (a, b)

c) Giới hạn đó trùng với giá trị của hàm tại (a, b), tức là L = f(a, b)

Các hàm sơ cấp liên tục trong miền xác định của nó.

Ví dụ 1 Tìm miền liên tục của hàm $f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2+y^2}$

Lời giải Hàm đã cho xác định trên toàn mặt phẳng, loại trừ tại gốc tọa độ, vì vậy nó liên tục khắp nơi, loại trừ tại điểm (0, 0) vì tại đây nó không các định.

Ví dụ 2 Tìm miền liên tục của hàm $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

Lời giải Tại các điểm (x, y) ≠ (0, 0) thì f(x, y) là hàm sơ cấp nên nó liên tục. Tại điểm (0, 0) hàm xác định và f(0,0) = 0. Theo kết quả của Ví dụ 1 phần 2.2.1, f(x, y) → 0 khi (x, y) → (0, 0), giới hạn này trùng với giá trị của hàm tại (0, 0), do đó hàm liên tục tại (0, 0).

Kết luận, hàm đã cho liên tục trên toàn mặt phẳng.

2.3. Đạo hàm riêng

2.3.1. Tìm các đạo hàm riêng cấp một

Khi đạo hàm theo biến nào thì xem các biến khác là tham số, không phụ thuộc biến lấy đạo hàm.

Tất cả các quy tắc tính đạo hàm của hàm một biến đều áp dụng được.

Ví dụ 1 Tìm các đạo hàm riêng cấp một của $f(x, y) = \frac{y}{x^2+y^2}$ tại điểm (1, 0).

Lời giải

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{2x}{(x^2+y^2)^2} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x^2+y^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

Tại điểm (1, 0): $\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{2}{16} = -\frac{1}{8} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{16}$

Ví dụ 2 Tìm các đạo hàm riêng cấp một của $f(x, y, z) = \frac{z}{x+y^2}$ tại điểm (1, 2, -2).

Lời giải

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{z}{(x+y^2)^2} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{2yz}{(x+y^2)^2} \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = -\frac{1}{x+y^2}$$

Tại điểm (1, 2, -2): $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2}{25} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{8}{25} \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = -\frac{1}{5}$

2.3.2. Đạo hàm hàm ẩn

Với F(x, y, z) = 0 thì

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z}$$

Ví dụ 1 Cho $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, tìm $\frac{\partial z}{\partial x}$ và $\frac{\partial z}{\partial y}$ tại $P\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right)$

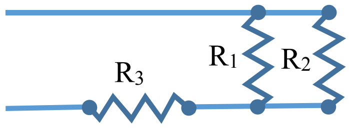
Lời giải Đặt $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0$

$F_x = 2x \qquad F_y = 2y \qquad F_z = 2z$

Với $x = \frac{a}{2}, y = \frac{a}{2}$ thì $z = \frac{a}{\sqrt{2}}$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{x}{z} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{y}{z} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Ví dụ 2 Ba điện trở với các giá trị R_1, R_2 và R_3 được mắc như hình bên. Tính tốc độ thay đổi của tổng trở R theo sự thay đổi của từng điện trở.



Lời giải Theo định luật Ohm, ta có

$$R = \frac{R_1R_2}{R_1+R_2} + R_3$$

Đặt $F(R_1, R_2, R_3, R) = R - \frac{R_1R_2}{R_1+R_2} - R_3 = 0$, khi đó

$$\frac{\partial F}{\partial R_1} = \frac{R_2(R_1+R_2) - R_1R_2}{(R_1+R_2)^2} = \frac{R_2^2}{(R_1+R_2)^2} \qquad \frac{\partial F}{\partial R_2} = \frac{R_1(R_1+R_2) - R_1R_2}{(R_1+R_2)^2} = \frac{R_1^2}{(R_1+R_2)^2}$$

$$\frac{\partial F}{\partial R_3} = -1 \qquad \frac{\partial F}{\partial R} = 1$$

Vậy $$\frac{\partial R}{\partial R_1} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial R_1}}{\frac{\partial F}{\partial R}} = -\frac{R_2^2}{(R_1+R_2)^2} \qquad \frac{\partial R}{\partial R_2} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial R_2}}{\frac{\partial F}{\partial R}} = -\frac{R_1^2}{(R_1+R_2)^2} \qquad \frac{\partial R}{\partial R_3} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial R_3}}{\frac{\partial F}{\partial R}} = 1$$

2.3.3. Đạo hàm riêng cấp cao

$$f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \quad f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \quad f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{yx}$$

Ví dụ 1 Tìm tất cả các đạo hàm riêng cấp hai của $f(x, y, z) = x^2e^y \sin z$

Lời giải

$f_x = 2xe^y \sin z\,, f_y = x^2e^y \sin z\,,\ f_z = x^2e^y \cos z$

$f_{xx} = 2e^y \sin z\,, f_{yy} = x^2e^y \sin z\,, f_{zz} = -x^2e^y \sin z$

$f_{xy} = 2xe^y \sin z\,, f_{xz} = 2xe^y \cos z\,, f_{yz} = x^2e^y \cos z$

Ví dụ 2 Tìm tất cả các đạo hàm riêng cấp ba của $f(x, y) = x^2 \cos y$

Lời giải

$f_x = 2x \cos y\,, f_y = -x^2 \sin y\,,\ f_{xx} = 2\cos y\,, f_{yy} = -x^2 \cos y\,, f_{xy} = -2x \sin y$

$f_{xxx} = -2\sin y\,, f_{yyy} = x^2 \sin y\,, f_{xxy} = -2\sin y\,, f_{yyx} = -2x\cos y$

2.4. Mặt phẳng tiếp diện và xấp xỉ tuyến tính

2.4.1. Mặt phẳng tiếp diện

- Phương trình mặt tiếp diện tại điểm $P(x_0, y_0, z_0)$ thuộc mặt cong $F(x, y, z) = 0$:
  $F_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0$
- Phương trình mặt tiếp diện tại điểm $P(x_0, y_0, z_0)$ thuộc mặt cong $z = f(x, y)$:
  Đặt $F(x, y, z) = z - f(x, y)$, khi đó $F_x = -f_x$, $F_y = -f_y$, $F_z = 1$. Thay vào trên:
  $-f_x(x - x_0) - f_y(y - y_0) + (z - z_0) = 0$, hay $z - z_0 = f_x(x - x_0) + f_y(y - y_0)$

Ví dụ 1 Viết phương trình tiếp diện của mặt cong $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ tại điểm $P\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Lời giải Đặt F(x, y, z) = $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$.

$F_x = 2x$, $F_y = 2y$, $F_z = 2z$. Tại P ta có $F_x = 1$, $F_y = 1$, $F_z = \sqrt{2}$

Phương trình tiếp diện là

$$\left(x-\tfrac{1}{2}\right)+\left(y-\tfrac{1}{2}\right)+\sqrt{2}\left(z-\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=0 \text{ hay } x+y+\sqrt{2}z-2=0$$

Ví dụ 2 Viết phương trình tiếp diện của mặt cong $f(x,y)=\frac{xy}{x^2+y^2}$ tại điểm P(0, 1, 0).

Lời giải

$$f_x=\frac{y(x^2+y^2)-2x^2y}{(x^2+y^2)^2} \qquad f_y=\frac{x(x^2+y^2)-2xy^2}{(x^2+y^2)^2}$$

Tại P: $f_x=1, f_y=0$. Vậy phương trình tiếp diện là z = x.

2.4.2. Xấp xỉ tuyến tính

Xấp xỉ tuyến tính tại điểm P(x_0, y_0, z_0) thuộc mặt cong F(x, y, z) = 0 là

$$L(x,y)=z_0-\frac{F_x}{F_z}(x-x_0)-\frac{F_y}{F_z}(y-y_0)$$

Xấp xỉ tuyến tính tại điểm P(x_0, y_0, z_0) thuộc mặt cong z = f(x, y) là

$$L(x,y)=f(x_0,y_0)+f_x(x-x_0)+f_y(y-y_0)$$

Ví dụ 1 Tìm xấp xỉ tuyến tính của mặt cong tại điểm P cho trong Ví dụ 1 mục 2.4.1.

Lời giải Từ phương trình của mặt tiếp diện là $x+y+\sqrt{2}z-2=0$, ta rút ra được $z=\frac{1}{\sqrt{2}}(2-x-y)$.

Vậy xấp xỉ tuyến tính tại điểm P đã cho là $L(x,y)=\frac{1}{\sqrt{2}}(2-x-y)$.

Ví dụ 2 Tìm xấp xỉ tuyến tính của mặt cong tại điểm P cho trong Ví dụ 2 mục 2.4.1.

Lời giải Từ phương trình của mặt tiếp diện là z = x ta nhận được xấp xỉ tuyến tính là L(x, y) = x.

2.4.3. Vi phân toàn phần

Vi phân toàn phần của hàm f(x, y) là $df=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy$

Số gia toàn phần của hàm f(x, y) là $\Delta f = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y)$

Khi Δx và Δy đủ nhỏ thì $\Delta f \approx df$, tức là $f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)\approx\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y$

Ví dụ 1 Tìm vi phân toàn phần của $f(x,y)=x^y$ tại điểm (2, 1)

Lời giải $f_x=yx^{y-1}$, $f_y=x^y\ln x$

Tại điểm (2, 0): $df=f_xdx+f_ydy=dx+2\ln 2\,dy$

Ví dụ 2 Tính gần đúng sin77^o.

Lời giải Xét f(x, y) = sin(x + y) = sinx cosy + siny cosx

$f_x=\cos x\cos y-\sin y\sin x \quad f_y=-\sin x\sin y+\cos y\cos x=f_x$

Ta có sin77^o = f(30^o + 1^o, 45^o + 1^o) ≈ f(30^o, 45^o) + 2f_x(30^o, 45^o)*1^o

$=\sin 30^o\cos 45^o+\sin 45^o\cos 30^o+2(\cos 30^o\cos 45^o-\sin 45^o\sin 30^o)*1^o$

$=\frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}+2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{180}=\frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{90}$

Với $\sqrt{2}\approx 1.4142, \sqrt{3}\approx 1.7321, \pi\approx 3.1416$ thì sin77^o ≈ 0.9750.

2.5. Đạo hàm của hàm hợp

Nếu $z = f(x,y)$ và $x = x(t), y = y(t)$ thì $\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$

Nếu $z = f(x,y)$ và $x = x(s,t), y = y(s,t)$ thì

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} \qquad \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$

Ví dụ 1 Tìm dz/dt của z = 2x^2 + 3y^2 + 4xy với x = cost, y = sint.

Lời giải Ta có $\frac{\partial z}{\partial x} = 4x + 4y,\ \frac{\partial z}{\partial y} = 6y + 4x, \frac{dx}{dt} = -\sin t, \frac{dy}{dt} = \cos t$

Vậy $\frac{dz}{dt} = -(4x + 4y)\sin t + (4x + 6y)\cos t$

$= -(4\cos t + 4\sin t)\sin t + (4\cos t + 6\sin t)\cos t$

$= 2\sin t\cos t + 4(\cos^2 t - \sin^2 t) = \sin 2t + 4\cos 2t$

Ví dụ 2 Tìm ∂z/∂s và ∂z/∂t nếu $z = e^{x+y}(x - y), x = \frac{t}{s}, y = \frac{s}{t}$

Lời giải $\frac{\partial z}{\partial x} = e^{x+y}(x - y + 1),\ \frac{\partial z}{\partial y} = e^{x+y}(x - y - 1)$

$$\frac{\partial x}{\partial s} = -\frac{t}{s^2}, \frac{\partial y}{\partial s} = \frac{1}{t}, \frac{\partial x}{\partial t} = \frac{1}{s}, \frac{\partial y}{\partial t} = -\frac{s}{t^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial s} = e^{x+y}(x - y + 1)\left(-\frac{t}{s^2}\right) + e^{x+y}(x - y - 1)\left(\frac{1}{t}\right)$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = e^{x+y}(x - y + 1)\left(\frac{1}{s}\right) + e^{x+y}(x - y - 1)\left(-\frac{s}{t^2}\right)$$

2.6. Đạo hàm theo hướng

2.6.1. Sử dụng định nghĩa tính đạo hàm theo hướng

u = ⟨a, b⟩ là véc tơ đơn vị, (x_0, y_0) là điểm thuộc miền xác định của f(x, y).

$$D_u f(x_0, y_0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0 + ah, y_0 + bh) - f(x_0, y_0)}{h}$$

Ví dụ 1 Cho $f(x,y) = x^3 + 2y^2$, $\mathbf{u} = \langle\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\rangle$. Tính đạo hàm theo hướng u của f tại điểm (1, 2).

Lời giải

$$\frac{\left(1 + \frac{1}{2}h\right)^3 + 2\left(2 + \frac{\sqrt{3}}{2}h\right)^2 - 1^3 - 2(2^2)}{h} = \frac{3}{2} + 4\sqrt{3} + \frac{9}{4}h + \frac{1}{8}h^2 \to \frac{3}{2} + 4\sqrt{3}$$

Vậy $D_u f(1,2) = \frac{3}{2} + 4\sqrt{3}$

Ví dụ 2 Cho $f(x,y,z) = x^2yz^3, \mathbf{u} = \langle 1, -1, 1\rangle$. Tính đạo hàm theo hướng u của f tại điểm (1, 0,1).

Lời giải Ta thấy **u** không phải là véc tơ đơn vị. Đặt **v** = **u**/|**u**| = $\langle\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\rangle$ thì **v** là véc tơ đơn vị. Đạo hàm theo hướng **u** của f cũng bằng đạo hàm theo hướng **v**.

$$\frac{\left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}h\right)^2\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}h\right)\left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}h\right)^3 - 0}{h} = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}h\right)\left(-\frac{1}{3}\right)\left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}h\right)^3 \to -\frac{1}{3}$$

Vậy $D_u f(1,0,1) = -\frac{1}{3}$.

2.6.2. Tính đạo hàm theo hướng thông qua các đạo hàm riêng

Với **u** = ⟨a, b, c⟩ là véc tơ đơn vị thì

$$D_{\mathbf{u}}f = \nabla f \cdot \mathbf{u} = \left\langle\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right\rangle \cdot \langle a, b, c\rangle$$

Ví dụ 1 Cho $f(x,y) = x^2y, \mathbf{u} = \langle -1,1\rangle$. Tính đạo hàm theo hướng **u** của f tại điểm (1, -1).

Lời giải Đặt **v** = **u**/|**u**| = $\langle\frac{-1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\rangle$ thì **v** là véc tơ đơn vị.

$f_x = 2xy$, $f_y = x^2$. Tại điểm (1, -1) ta có $f_x = -2$, $f_y = 1$.

$D_{\mathbf{u}}f = D_{\mathbf{v}}f = \langle -2,1\rangle \cdot \left\langle\frac{-1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right\rangle = \frac{3}{\sqrt{2}}$

Ví dụ 2 Cho $f(x,y,z) = x^2yz^3, \mathbf{u} = \langle 1,-1,1\rangle$. Tính đạo hàm theo hướng **u** của f tại điểm (1,0,1).

Lời giải Đặt **v** = **u**/|**u**| = $\langle\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{-1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\rangle$ thì **v** là véc tơ đơn vị.

$f_x = 2xyz^3, f_y = x^2z^3, f_z = 3x^2yz^2$.

Tại điểm (1,0,1) ta có $f_x = 0, f_y = 1, f_z = 0$.

$D_{\mathbf{u}}f = D_{\mathbf{v}}f = \langle 0,1,0\rangle \cdot \left\langle\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{-1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}$

Ví dụ 3 Cho $f(x,y) = \frac{x}{y^2+1}$ và **u** là véc tơ làm với hướng dương của trục x một góc π/3.

Tính đạo hàm theo hướng **u** của f tại điểm (1,-1).

Lời giải Véc tơ đơn vị làm với hướng dương của trục x một góc π/3 là

$\mathbf{u} = \left\langle\cos\frac{\pi}{3},\sin\frac{\pi}{3}\right\rangle = \langle\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\rangle$. Ta có $f_x = \frac{1}{y^2+1}, f_y = \frac{-2xy}{(y^2+1)^2}$

Tại điểm (1, -1) thì $f_x = \frac{1}{2}, f_y = \frac{1}{2}$, nên $D_{\mathbf{u}}f = \langle\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle \cdot \langle\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\rangle = \frac{\sqrt{3}+1}{4}$

Ví dụ 4 Cho $f(x,y,z) = x + yz$ và **u** là véc tơ làm với các hướng dương của các trục tọa độ những góc bằng nhau. Tính đạo hàm theo hướng **u** của f tại điểm (1,-1, 1).

Lời giải Gọi **u** = ⟨a, b, c⟩ là véc tơ đơn vị làm với các hướng dương của các trục tọa độ những góc bằng nhau, thì a = b = c và $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Do đó a = b = c = $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Ta có $f_x = 1, f_y = z, f_z = y$. Tại điểm (1, -1, 1) thì $f_x = 1, f_y = 1, f_z = -1$.

Vậy $D_{\mathbf{u}}f = \langle 1,1,-1\rangle \cdot \langle\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

2.7. Cực trị không điều kiện của hàm nhiều biến

2.7.1. Cực trị không điều kiện của hàm hai biến

1. *Tìm các điểm dừng $M_k(x_k, y_k)$ từ hệ:* $\{f_x = 0, f_y = 0$
2. *Xác định* $\delta(x,y) = f_{xx}f_{yy} - \left(f_{xy}\right)^2$
3. *Với mỗi $M_k(x_k, y_k)$, nếu*
   a. *$\delta(x_k, y_k) < 0$: M_k không phải là điểm cực trị*
   b. *$\delta(x_k, y_k) > 0$: M_k là điểm cực đại nếu $f_{xx}(x_k, y_k) < 0$, cực tiểu nếu $f_{xx}(x_k, y_k) > 0$*
   c. *$\delta(x_k, y_k) = 0$: Chưa kết luận được, cần xét trực tiếp số gia toàn phần $\Delta f(M_k)$.*
      i. *Nếu $\Delta f(M_k) < 0$: M_k là điểm cực đại*
      ii. *Nếu $\Delta f(M_k) > 0$: M_k là điểm cực tiểu*
      iii. *Nếu $\Delta f(M_k) \gtrless 0$: M_k không phải là điểm cực trị.*

Ví dụ 1 Tìm cực trị của $f(x, y) = x^2 + 2xy + 2y^2 + x - y + 1$.

Lời giải

$\{f_x = 0, f_y = 0 \Leftrightarrow \{2x + 2y + 1 = 0, 2x + 4y - 1 = 0 \Leftrightarrow \{x = -\frac{3}{2}, y = 1 \Rightarrow M(-\frac{3}{2}, 1)$

$f_{xx} = 2, f_{yy} = 4, f_{xy} = 2 \Rightarrow \delta = (2)(4) - 2^2 = 4 > 0.$

Vậy $M(-\frac{3}{2},1)$là điểm cực trị. Vì $f_{xx} = 2 > 0$ nên $M(-\frac{3}{2},1)$ là điểm cực tiểu.

Giá trị cực tiểu là f(M) $= \frac{9}{4} - 3 + 2 - \frac{3}{2} - 1 + 1 = -\frac{1}{4}$

Ví dụ 2 Tìm cực trị của $f(x,y) = e^{-x^2-y^2}xy$

Lời giải

$$\begin{cases} f_x = e^{-x^2-y^2}(-2x^2y + y) = 0 \\ f_y = e^{-x^2-y^2}(-2xy^2 + x) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (-2x^2+1)y = 0 \\ (-2y^2+1)x = 0 \end{cases}$$

a) $y = 0, x = 0$: $M_0(0, 0)$

b) $1 - 2x^2 = 0, 1 - 2y^2 = 0$:

$M_1\left(\frac{-1}{\sqrt{2}},\frac{-1}{\sqrt{2}}\right), M_2\left(\frac{-1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right), M_3\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{-1}{\sqrt{2}}\right), M_4\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$f_{xx} = e^{-x^2-y^2}(4x^3y - 6xy), f_{yy} = e^{-x^2-y^2}(4xy^3 - 6xy)$

$f_{xy} = e^{-x^2-y^2}(4x^2y^2 - 2y^2 - 2x^2 + 1)$

k	M_k	$\delta(M_k)$	$f_{xx}(M_k)$	Kết luận
0	M_0	-1		Không là điểm cực trị
1	M_1	$4/e^2$	-2/e	Điểm cực đại. Giá trị cực đại là $\frac{1}{2e}$
2	M_2	$4/e^2$	2/e	Điểm cực tiểu. Giá trị cực tiểu là $\frac{-1}{2e}$
3	M_3	$4/e^2$	2/e	Điểm cực tiểu. Giá trị cực tiểu là $\frac{-1}{2e}$
4	M_4	$4/e^2$	-2/e	Điểm cực đại. Giá trị cực đại là $\frac{1}{2e}$

Ví dụ 3 Tìm cực trị của $f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}(x^2+y^2)$

Lời giải

$$\begin{cases} f_x = 2e^{-(x^2+y^2)}[-x(x^2+y^2-1)] = 0 \\ f_y = 2e^{-(x^2+y^2)}[-y(x^2+y^2-1)] = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(x^2+y^2-1) = 0 \\ y(x^2+y^2-1) = 0 \end{cases}$$

a) $x = 0, y = 0$: $M_0(0, 0)$

b) $x = 0, y^2 - 1 = 0$: $M_1(0, -1)$, $M_2(0, 1)$

c) $x^2 - 1 = 0, y = 0$: $M_3(-1, 0)$, $M_4(1, 0)$

$f_{xx} = 2e^{-(x^2+y^2)}[2x^2(x^2+y^2-1) - 3x^2 - y^2 + 1]$

$f_{yy} = 2e^{-(x^2+y^2)}[2y^2(x^2+y^2-1) - 3y^2 - x^2 + 1]$

$f_{xy} = 2e^{-(x^2+y^2)}[2xy(x^2+y^2-2)]$

Tại M_0: $f_{xx} = 2$, $f_{yy} = 2$, $f_{xxy} = 0$ nên $\delta = 4 > 0$. Vậy $M_0(0, 0)$ là điểm cực tiểu.

Giá trị cực tiểu tại M_0 là f(0, 0) = 0.

Dễ kiểm tra rằng tại các điểm còn lại ta đều có $f_{xx} = f_{yy} = f_{xy} = 0$ nên $\delta = 0$. Vì vậy ta phải xét trực tiếp Δf. Tại $M_1(0, -1)$, ta ký hiệu h và k tương ứng là các số gia của $x_1 = 0$ và $y_1 = -1$. Khi đó

$\Delta f = f(0 + h, -1 + k) - f(0, -1) = e^{-[h^2+(-1+k)^2]}[h^2 + (-1+k)^2] - e^{-1}$

Đặt $t = h^2 + (-1 + k)^2$, khi đó $\Delta f = te^{-t} - e^{-1}$.

Xét hàm $g(t) = te^{-t} - e^{-1}, g'(t) = e^{-t}(-t+1) = 0 \Leftrightarrow t = 1$. Ta thấy g'(t) đổi dấu từ dương sang âm khi t biến thiên từ bên trái sang bên phải điểm t = 1, vậy g(t) đạt cực đại tại t = 1, giá trị cực đại là g(1) = 0. Do đó $\Delta f \geq 0$, nên $M_1(0, -1)$ là điểm cực đại, giá trị cực đại f(0, -1) = 1/e.

Xét hoàn toàn tương tự, ta nhận được các điểm còn lại cũng là các điểm cực đại với cùng một giá trị cực đại là 1/e.

2.7.2. Các giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm hai biến

Giả thiết hàm f(x, y) xác định trên miền đóng giới nội D. Các bước tìm max, min như sau:

1. *Tìm các điểm dừng $M_k(x_k, y_k)$ từ hệ: $\{f_x = 0, f_y = 0$, rồi tìm max, min tạm thời*
   $M = \max\{f(M_k)\}$, $m = \min\{f(M_k)\}$
2. *Trên biên của D, ta có y = y(x) với $a \le x \le b$. Thay y bởi y(x) vào f(x, y) ta nhận được hàm một biến f(x, y(x)) xác định trên [a, b]. Tìm max và min của hàm này trên [a, b].*
3. *So sánh các max, min trên biên với M, m ở trên, ta tìm được giá trị lớn nhất và nhỏ nhất.*

Ví dụ 1 Tìm các giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $f(x, y) = x^2 - y^2$ trên miền $x^2 + y^2 \le 4$.

Lời giải Giải hệ $\{f_x = 2x = 0, f_y = -2y = 0$ ta được x = 0, y = 0, ta có f(0, 0) = 0.

Trên biên, $y^2 = 4 - x^2$ với $-2 \le x \le 2$, thay vào ta được $f(x, y(x)) = 2x^2 - 4$, $-2 \le x \le 2$.

$f'(x) = 4x = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Ta có f(0) = -4, f(-2) = f(2) = 4.

Vậy $f_{max} = 4$, $f_{min} = -4$.

Ví dụ 2 Cho $f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}(2x^2 + 3y^2)$ trên miền $x^2 + y^2 \le 1$.

Tìm các giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của f.

Lời giải

$$\begin{cases} f_x = e^{-(x^2+y^2)}[-2x(2x^2 + 3y^2 - 2)] = 0 \\ f_y = e^{-(x^2+y^2)}[-2y(2x^2 + 3y^2 - 3)] = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(2x^2 + 3y^2 - 2) = 0 \\ y(2x^2 + 3y^2 - 3) = 0 \end{cases}$$

Dễ thấy các điểm dừng là: $M_0(0, 0)$, $M_1(0, -1)$, $M_2(0, 1)$, $M_3(-1, 0)$, $M_4(1, 0)$.

Các giá trị tương ứng $f(M_k)$ là: 0, 3/e, 3/e, 2/e, 2/e. Do đó M = 3/e, m = 0.

Trên biên, $y^2 = 1 - x^2$, $-1 \le x \le 1$. Thay vào ta được $f(x, y(x)) = (3 - x^2)/e$, $-1 \le x \le 1$.

Ta có $f'(x) = -2x/e = 0 \Leftrightarrow x = 0$. f(0) = 3/e, f(-1) = f(1) = 2/e.

Vậy $f_{max} = 3/e$, $f_{min} = 0$.

2.8. Cực trị có điều kiện của hàm nhiều biến

2.8.1. Cực trị có điều kiện của hàm hai biến

Các bước tìm cực trị của z = f(x, y) với ràng buộc g(x, y) = 0.

a) Giải hệ $\begin{cases} \frac{f_x}{g_x} = \frac{f_y}{g_y} \\ g(x,y) = 0 \end{cases}$ tìm được các điểm $M_j(x_j, y_j)$.

b) Với mỗi M_j, xét dấu của $\Delta f = f(x_j + h, y_j + k) - f(x_j, y_j)$, với $g(x_j + h, y_j + k) = 0$

+ Nếu $\Delta f < 0$: M_j là điểm cực đại

+ Nếu $\Delta f > 0$: M_j là điểm cực tiểu

+ Nếu $\Delta f \gtrless 0$: M_j không là điểm cực trị

Chú ý: Trong lân cận đủ nhỏ của M_j thì dấu của Δf trùng với dấu của biểu thức sau

Với hàm hai biến f(x, y): $f_{xx}h^2 + f_{yy}k^2 + 2f_{xy}hk$

Với hàm ba biến f(x, y, z): $f_{xx}h^2 + f_{yy}k^2 + f_{zz}l^2 + 2(f_{xy}hk + f_{xz}hl + f_{yz}kl)$

Ví dụ 1 Tìm cực trị của z = xy với $g(x,y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - 1 = 0$.

Lời giải $\frac{f_x}{g_x} = \frac{f_y}{g_y} \Leftrightarrow -yx^2 = -xy^2 \Leftrightarrow xy(x - y) = 0$

Kết hợp với $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} - 1 = 0$ suy ra x = y = 2 .

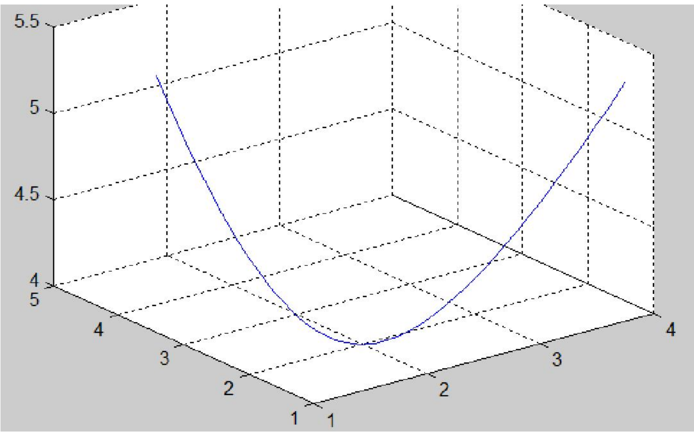
$\Delta f = (2+h)(2+k) - 4 = 2(h+k) + hk$

Từ $\frac{1}{2+h} + \frac{1}{2+k} = 1$ suy ra h và k trái dấu, tức hk < 0.

Mặt khác, $\frac{1}{2+h} + \frac{1}{2+k} = 1 \Leftrightarrow h + k + hk = 0 \Leftrightarrow h + k = -kh$

Vì thế Δf = 2(h + k) + kh = -2hk + kh = - kh > 0.

Do đó (2, 2) là điểm cực tiểu, giá trị cực tiểu là f(2, 2) = 4.



Thực tế, điểm (2, 2, 4) là điểm thấp nhất trên đường cong là giao của mặt cong z = xy với mặt trụ $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1$.

Ví dụ 2 Tìm cực trị của z = $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ với $g(x,y) = xy - 1 = 0$.

Lời giải $\frac{f_x}{g_x} = \frac{f_y}{g_y} \Leftrightarrow -\frac{1}{x^2 y} = -\frac{1}{y^2 x} \Leftrightarrow xy(x-y) = 0$

Kết hợp với xy – 1 = 0 suy ra x = y = 1.

$\Delta f = \frac{1}{1+h} + \frac{1}{1+k} - 2 = \frac{2+h+k-2(1+h)(1+k)}{(1+h)(1+k)} = \frac{-(h+k)-2hk}{(1+h)(1+k)}$

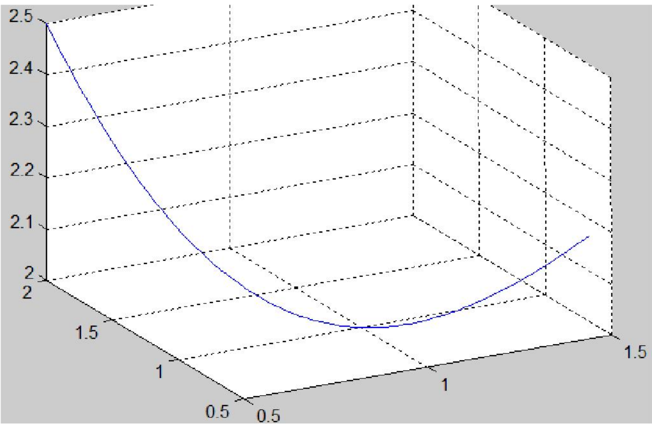
Khi h và k đủ nhỏ thì dấu của Δf trùng với dấu của tử số, -(h + k) – 2hk.

Từ (1 + h)(1 + k) =1 suy ra h và k trái dấu, tức là hk < 0.

Mặt khác, (1 + h)(1 + k) = 1 nên h + k + hk = 0, hay h + k = -hk.

Do đó -(h + k) – 2hk = hk – 2hk = -hk > 0, tức là Δf > 0.

Vậy (1, 1) là điểm cực tiểu, giá trị cực tiểu là f(1, 1) = 2.



Rõ ràng, điểm (1, 1, 2) là điểm thấp nhất trên đường cong là giao của mặt cong z = $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ với mặt trụ xy = 1.

2.8.2. Cực trị có điều kiện của hàm hai biến theo phương pháp nhân tử Lagrange

Ví dụ 1 Tìm cực trị của $f(x,y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ với ràng buộc x + y = 1.

Lời giải

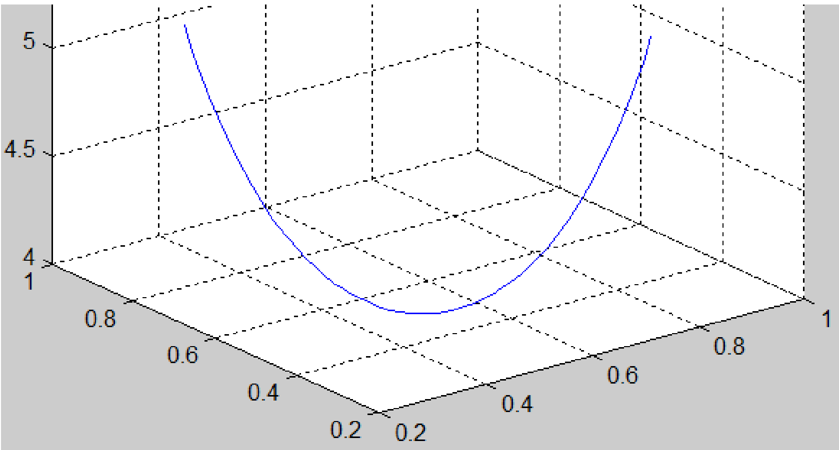
$$\begin{cases} f_x + \lambda g_x = -\frac{1}{x^2} + \lambda = 0 \\ f_y + \lambda g_y = -\frac{1}{y^2} + \lambda = 0 \\ x + y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm y \\ x + y = 1 \end{cases} \Rightarrow \mathrm{M}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$\Delta f = \frac{1}{1/2 + h} + \frac{1}{1/2 + k} - 4 = \frac{2(2k+1) + 2(2h+1) + k - 4(1 + 2h)(1 + 2k)}{(1 + 2h)(1 + 2k)} = \frac{-4\,(h + k) - 16hk}{(1 + h)(1 + k)}$$

Khi h và k đủ nhỏ thì dấu của Δf trùng với dấu của tử số, -(h + k) – 4hk.

Từ $\frac{1}{2} + h + \frac{1}{2} + k = 1$ suy ra h + k = 0 và h trái dấu với k, tức là hk < 0.

Vậy -(h + k) – 4hk = -4hk > 0, nên $\mathrm{M}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ là điểm cực tiểu, giá trị cực tiểu là 4.



Rõ ràng, điểm (1/2, 1/2, 4) là điểm thấp nhất trên đường cong là giao của mặt cong z = $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ với mặt phẳng x + y = 1

Ví dụ 2 Tìm cực trị của $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy$ với điều kiện $x^2 + y^2 = 1$

Lời giải

$$\begin{cases} 2x - y + 2\lambda x = 0 \\ 2y - x + 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2(1 + \lambda)x = y \\ 2(1 + \lambda)y = x \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

Dễ thấy x ≠ 0 và y ≠ 0, nên 2(1 + λ) = y/x = x/y hay $x^2 = y^2$.

Kết hợp với $x^2 + y^2 = 1$ ta có $x^2 = y^2 = \frac{1}{2}$.

a) Nếu x = y = $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$: 2(1 + λ) = 1 hay λ = -1/2.

b) Nếu x = - y = $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$: 2(1 + λ) = -1 hay λ = -3/2

Vì thế ta cần xét tại 4 điểm:

$$M_1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), M_2\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right) \quad \text{với } \lambda = -\frac{1}{2}$$

$$M_3\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), M_4\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right) \quad \text{với } \lambda = -\frac{3}{2}$$

Xét F(x, y) = f(x) + λg(x). Vì g(x) = 0 nên Δf = ΔF.

$F(x, y) = x^2 + y^2 - xy + \lambda(x^2 + y^2 - 1) = (1 + \lambda)x^2 + (1 + \lambda)y^2 - xy - \lambda$

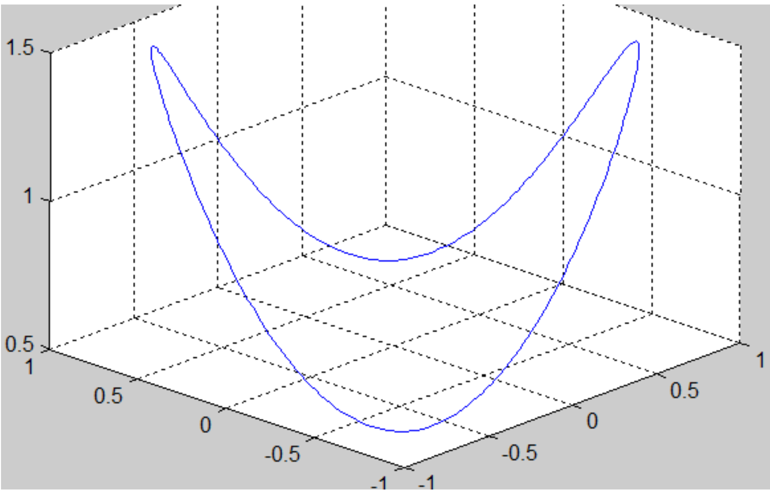
$F_x = 2x(1 + \lambda) - y \quad F_y = 2y(1 + \lambda) - x \quad F_{xx} = F_{yy} = 2(1 + \lambda) \quad F_{xy} = -1$

Tại M_1 và M_2: $F_{xx}h^2 + 2F_{xy}hk + F_{yy}k^2 = h^2 + k^2 - 2kh = (h - k)^2 \geq 0$

Vậy hàm đạt cực tiểu tại M_1 và M_2, giá trị cực tiểu là 1 – 1/2 = 1/2.

Tại M_3 và M_4: $F_{xx}h^2 + 2F_{xy}hk + F_{yy}k^2 = -h^2 - k^2 - 2kh = -(h + k)^2 \leq 0$

Vậy hàm đạt cực đại tại M_3 và M_4, giá trị cực đại là $1 + 1/2 = 3/2$.



Hình bên là giao của mặt cong $z = x^2 + y^2 - xy$ với mặt trụ $x^2 + y^2 = 1$

Rõ ràng có hai điểm cực đại và hai điểm cực tiểu.