CHƯƠNG 6. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP CAO

Những ý tưởng cơ bản của phương trình vi phân đã được giải thích trong Chương 9, ở đó chúng ta đã tập trung vào phương trình cấp một. Trong chương này, chúng ta nghiên cứu phương trình vi phân tuyến tính cấp hai và tìm hiểu áp dụng chúng ra sao để giải quyết các bài toán liên quan đến sự rung động của lò xo và phân tích các mạch điện. Chúng ta cũng sẽ xem xét các chuỗi vô hạn có thể được sử dụng để giải các phương trình vi phân.

6.1. Phương trình vi phân tuyến tính cấp hai

Một phương trình vi phân tuyến tính cấp hai có dạng

[1] $P(x)y''(x) + Q(x)y'(x) + R(x)y(x) = G(x)$

trong đó P, Q, R và G là các hàm liên tục. Chúng ta đã thấy tại mục 5.1 rằng các phương trình thuộc loại này phát sinh trong việc nghiên cứu chuyển động của lò xo. Trong phần 6.3, chúng ta sẽ tiếp tục theo đuổi ứng dụng này cũng như việc áp dụng tới các mạch điện.

Trong phần này chúng ta nghiên cứu trường hợp $G(x) = 0$ với mọi x trong phương trình [1]. Những phương trình như vậy là phương trình tuyến tính thuân nhất. Do đó, dạng của một phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất cấp hai là

[2] $P(x)y''(x) + Q(x)y'(x) + R(x)y(x) = 0$

Nếu $G(x) \neq 0$ với mọi x, phương trình 1 được gọi là không thuần nhất và được trình bày trong mục 6.2.

6.1.1. Phương trình vi phân tuyến tính cấp hai thuần nhất

Hai định lý cơ bản cho phép chúng ta giải phương trình tuyến tính thuần nhất. Định lý thứ nhất nói rằng tổ hợp tuyến tính của hai nghiệm cũng là nghiệm.

[3] **Định lý** Nếu $y_1(x)$ và $y_2(x)$ là hai nghiệm của phương trình thuần nhất [2] và c_1 và c_2 là những hằng số thì $y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ cũng là nghiệm của Phương trình 2.

Chứng minh Bởi vì y_1 và y_2 là các nghiệm của phương trình [2], ta có

$$P(x)y_1'' + Q(x)y_1' + R(x)y_1 = 0 \text{ và } P(x)y_2'' + Q(x)y_2' + R(x)y_2 = 0$$

Do đó sử dụng các quy tắc cơ bản của đạo hàm, ta có

$$\begin{aligned}
&P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y \\
&\quad = P(x)(c_1y_1 + c_2y_2)'' + Q(x)(c_1y_1 + c_2y_2)' + R(x)(c_1y_1 + c_2y_2) \\
&\quad = P(x)(c_1y_1'' + c_2y_2'') + Q(x)(c_1y_1' + c_2y_2') + R(x)(c_1y_1 + c_2y_2) \\
&\quad = c_1[P(x)y_1'' + Q(x)y_1' + R(x)y_1] + c_2[P(x)y_2'' + Q(x)y_2' + R(x)y_2] \\
&\quad = c_1(0) + c_2(0) = 0
\end{aligned}$$

Vì vậy $y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ cũng là nghiệm của Phương trình 2. ■

Định lý thứ hai nói rằng nếu y_1 và y_2 là hai nghiệm độc lập tuyến tính, tức $y_1(x)/y_2(x) \neq$ const, thì tổ hợp tuyến tính của chúng sẽ là nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất.

[4] **Định lý** Nếu y_1 và y_2 là hai nghiệm độc lập tuyến tính của Phương trình 2, và $P(x) \neq 0$, thì nghiệm tổng quát được cho bởi $y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$, với C_1 và C_2 là những hằng số tùy ý.

Trong trường hợp tổng quát, không dễ tìm được nghiệm riêng của phương trình tuyến tính cấp hai. Nhưng điều đó hoàn toàn có thể nếu các hàm P, Q và R là các hằng số, tức là phương trình thuần nhất có dạng

[5] ay" + by' + cy = 0 trong đó a, b và c - const

Không khó để tìm ứng cử cho nghiệm riêng của phương trình [5] nếu chúng ta phát biểu phương trình bằng lời. Chúng ta tìm hàm y sao cho một hằng số nhân với y" cộng với hằng số khác nhân với y' cộng với hằng số thứ ba nhân với y là bằng 0.

Chúng ta biết rằng hàm mũ $y = e^{rx}$ (r – const) có tính chất là đạo hàm của nó bằng một hằng số nhân với nó: $y' = re^{rx}$. Hơn nữa, $y" = r^2e^{rx}$. Nếu chúng ta thay các biểu thức đó vào phương trình [5], ta thấy y là nghiệm nếu

$$ar^2e^{rx} + bre^{rx} + ce^{rx} = 0 \text{ hoặc } (ar^2 + br + c)e^{rx} = 0$$

Nhưng e^{rx} khác 0, nên $y = e^{rx}$ là nghiệm của phương trình [5] nếu *r* là nghiệm của

[6] $$ar^2 + br + c = 0$$

Phương trình [6] được gọi là phương trình đặc trưng (characteristic) của phương trình vi phân ay" + by' + c = 0. Chú ý rằng phương trình đại số nhận được từ phương trình vi phân bằng cách thay y", y' và y bởi r^2, *r* và 1 tương ứng.

Đôi khi các nghiệm r_1 và r_2 của phương trình đặc trưng có thể tìm được bằng sự phân tích ra thừa số. Trong nhưng trường hợp khác chúng được tìm bởi công thức:

[7] $$r_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{và} \quad r_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Chúng ta phân biệt các trường hợp dựa vào dấu của biệt thức $b^2 - 4ac$.

Trường hợp 1 $b^2 - 4ac > 0$

Trong trường hợp này các nghiệm r_1 và r_2 của phương trình đặc trưng là phân biệt, nên $y_1 = e^{r_1x}$ và $y_2 = e^{r_2x}$ là hai nghiệm độc lập tuyến tính của phương trình [5]. Do đó

[8] Nếu phương trình đặc trưng có hai nghiệm thực phân biệt $r_1 \neq r_2$ thì nghiệm tổng quát của phương trình ay" + by' + cy = 0 là

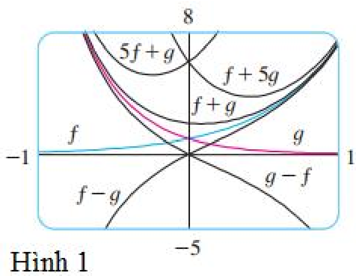
$$y = C_1e^{r_1x} + C_2e^{r_2x}$$

Ví dụ 1 Giải phương trình y" + y' – 6y = 0.

Lời giải Phương trình đặc trưng là

$$r^2 + r - 6 = (r - 2)(r + 3) = 0$$

nên có các nghiệm là $r_1 = 2$ và $r_2 = -3$. Do đó nghiệm tổng quát là $y = C_1e^{2x} + C_2e^{-3x}$ ■



Hình 1

Chúng ta có thể kiểm tra rằng đó thực sự là nghiệm bằng cách tính các đạo hàm rồi thay vào phương trình vi phân. Hình 1 là đồ thị của các đường cong nghiệm cơ bản

$$f = e^{2x} \quad \text{và} \quad g = e^{-3x}$$

cùng một số nghiệm khác là tổ hợp tuyến tính của f và g.

Ví dụ 2 Giải phương trình $3y" + y' - y = 0$.

Lời giải Giải phương trình đặc trưng chúng ta nhận được

$$r = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{6}$$

Vậy hai nghiệm cơ bản của phương trình vi phân là

$$y_1 = e^{\frac{-1-\sqrt{13}}{6}x} \qquad \text{và} \qquad y_2 = e^{\frac{-1+\sqrt{13}}{6}x}$$

Nghiệm tổng quát là $y = C_1y_1 + C_2y_2 = C_1e^{\frac{-1-\sqrt{13}}{6}x} + C_2e^{\frac{-1+\sqrt{13}}{6}x}$ ■

Trường hợp 2 $b^2 - 4ac = 0$

Trong trường hợp $r_1 = r_2 = r$, tức là phương trình đặc trưng có nghiệm kép. Từ phương trình [7] chúng ta có

[9] $r = -\frac{b}{2a}$ nên $2ar + b = 0$

Chúng ta biết rằng $y_1 = e^{rx}$ là một nghiệm của phương trình [5], bây giờ chúng ta kiểm tra lại rằng $y_2 = xe^{rx}$ cũng là nghiệm:

$$ay_2" + by_2' + cy_2 = a(2re^{rx} + r^2xe^{rx}) + b(e^{rx} + rxe^{rx}) + cxe^{rx}$$
$$= (2ar + b)e^{rx} + (ar^2 + br + c)xe^{rx} = 0e^{rx} + 0(xe^{rx}) = 0$$

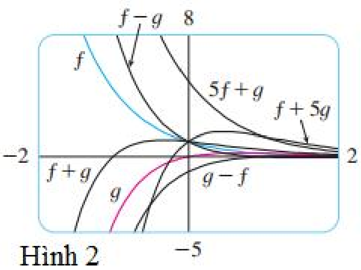
Biểu thức trong ngoặc đơn đầu tiên bằng 0 là theo phương trình [9], còn biểu thức thứ hai bằng 0 vì *r* là nghiệm của phương trình đặc trưng. Vì các nghiệm $y_1 = e^{rx}$ và $y_2 = xe^{rx}$ là độc lập tuyến tính nên theo Định lý 4 ta nhận được nghiệm tổng quát.

[10] Nếu phương trình đặc trưng $ar^2 + br + c = 0$ có nghiệm kép *r* thì nghiệm tổng quát của phương trình $ay" + by' + cy = 0$ là $y = C_1e^{rx} + C_2xe^{rx} = (C_1 + C_2x)e^{rx}$

Ví dụ 3 Giải phương trình $4y" + 12y' + 9y = 0$

Lời giải Vì $4r^2 + 12r + 9 = (2r + 3)^2$ nên phương trình đặc trưng có nghiệm kép $r = -\frac{3}{2}$ nên nghiệm tổng quát là

$$y = C_1e^{-\frac{3}{2}x} + C_2xe^{-\frac{3}{2}x} = (C_1 + C_2x)e^{-\frac{3}{2}x}$$ ■



Hình 2

Hình 2 trình ra đồ thị của các nghiệm cơ bản $f = e^{-\frac{3}{2}x}$ và $g = xe^{-\frac{3}{2}x}$ cùng một số nghiệm riêng. Chú ý rằng tất cả các nghiệm đó đều dần về 0 khi x → ∞.

Trường hợp 3 $b^2 - 4ac < 0$

Trong trường hợp này, phương trình đặc trưng có các nghiệm phức liên hợp

$$r_1 = \alpha + i\beta \qquad r_2 = \alpha - i\beta$$

trong đó α và β là các số thực. Cụ thể, $\alpha = -\frac{b}{2a}, \beta = \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

Khi đó sử dụng phương trình Euler $e^{i\theta} = cos\theta + isin\theta$, ta biểu diễn hai nghiệm cơ bản dưới dạng khác:

$$\overline{y}_1 = e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x}(cos\beta x + isin\beta x) \qquad \overline{y}_2 = e^{(\alpha-i\beta)x} = e^{\alpha x}(cos\beta x - isin\beta x)$$

Từ đây ta nhận được hai nghiệm cơ bản thuần thực là

$$y_1 = \frac{1}{2}(\overline{y}_1 + \overline{y}_2) = e^{ax}cos\beta x \qquad y_2 = \frac{1}{i2}(\overline{y}_1 - \overline{y}_2) = e^{ax}sin\beta x$$

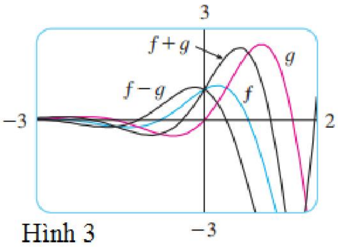
[11] Nếu phương trình đặc trưng $ar^2 + br + c = 0$ có nghiệm phức $r_1 = \alpha + i\beta, r_2 = \alpha - i\beta$ thì nghiệm tổng quát của $ay" + by' + cy = 0$ là $y = e^{ax}(C_1cos\beta x + C_2sin\beta x)$

Ví dụ 4 Giải phương trình $y" - 6y' + 13y = 0$.

Lời giải Phương trình đặc trưng là $r^2 - 6r + 13 = 0$ có nghiệm phức $r_{1,2} = 3 \pm i2$.

Theo công thức [11], nghiệm tổng quát là $y = e^{3x}(C_1cos2x + C_2sin2x)$

Hình 3 là đồ thị của các nghiệm cơ bản $f = e^{3x}cos2x$ và $g = e^{3x}sin2x$ cùng một vài tổ hợp tuyến tính của chúng.



Hình 3

6.1.2. Bài toán giá trị đầu và bài toán biên

Bài toán giá trị đầu của phương trình vi phân cấp hai là tìm nghiệm y của phương trình sao cho thỏa mãn các giá trị đầu $y(x_0) = y_0 \quad y'(x_0) = y_1$

trong đó y_0 và y_1 là các hằng số cho trước.

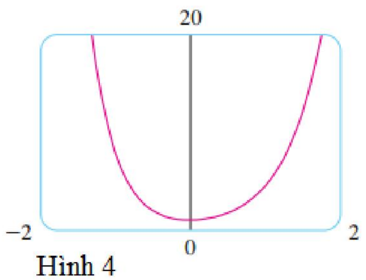
Người ta chứng minh được rằng, nếu trên một khoảng nào đó, P, Q, R và G là liên tục và P(x) ≠ 0 thì nghiệm của bài toán giá trị đầu là tồn tại và duy nhất. Ví dụ 5 và Ví dụ 6 minh họa kỹ thuật giải các bài toán như thế.

Ví dụ 5 Giải bài toán giá trị đầu

$$y'' + y' - 6y = 0 \qquad y(0) = 1 \qquad y'(0) = 0$$

Lời giải Từ Ví dụ 1 chúng ta biết rằng nghiệm tổng quát của phương trình là

$$y(x) = C_1e^{2x} + C_2e^{-3x}$$



Hình 4

Đạo hàm nghiệm này ta nhận được

$$y'^{(x)} = 2C_1e^{2x} - 3C_2e^{-3x}$$

Để thỏa mãn các diều kiện đầu thì

[12] $$y(0) = C_1 + C_2 = 1$$

[13] $$y'(0) = 2C_1 - 3C_2 = 0$$

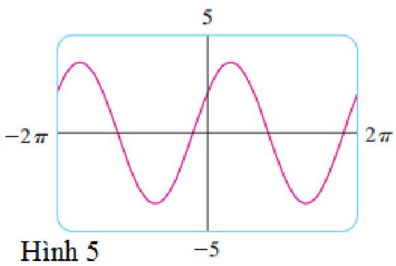
Từ [13] ta có $C_2 = \frac{2}{3}C_1$ và do đó từ [12] cho

$$C_1 + \frac{2}{3}C_1 = 1 \Rightarrow C_1 = \frac{3}{5} \qquad C_2 = \frac{2}{5}$$

Vì thế nghiệm cần tìm của bài toán giá trị đầu là $y = \frac{3}{5}e^{2x} + \frac{2}{5}e^{-3x}$ ■

Ví dụ 6 Giải bat giá trị đầu $y'' + y = 0 \quad y(0) = 2 \quad y'(0) = 3$

Lời giải Phương trình đặc trưng $r^2 + 1 = 0$ có nghiệm $r_{1,2} = \pm i$.



Hình 5

Do đó nghiệm tổng quát là

$$y(x) = C_1cosx + C_2sinx$$

Vì $$y'(x) = -C_1sinx + C_2cosx$$

nên từ điều kiện đầu ta có $C_1 = 2, C_2 = 3$

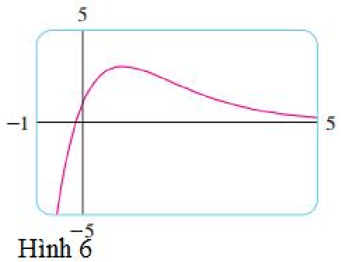
Vậy nghiệm của bài toán là $y = 2cosx + 3sinx$ ■

Bài toán biên của phương trình vi phân cấp hai là tìm nghiệm *y* của phương trình vi phân sao cho thỏa mãn các điều kiện biên $y(x_0) = y_0 \quad y(x_1) = y_1$

Ngược lại với bài toán giá trị đầu, bài toán biên không phải luôn luôn có nghiệm. Phương pháp giải được minh họa trong Ví dụ 7.

Ví dụ 7 Giải bài toán biên $y'' + 2y' + y = 0 \quad y(0) = 1 \quad y(1) = 3$

Lời giải Phương trình đặc trưng là $r^2 + 2r + 1 = 0$ hay $(r+1)^2 = 0$



Hình 6

nên có nghiệm kép $r = -1$

Do đó nghiệm tổng quát là $y(x) = C_1e^{-x} + C_2xe^{-x}$

Để thỏa mãn các giá trị biên thì

$y(0) = C_1 = 1$ và $y(1) = C_1e^{-1} + C_2e^{-1} = 3$

Giả ra được $C_1 = 1$ và $C_2 = 3e - 1$.

Vì vậy nghiệm của bài toán biên là $y = e^{-x} + (3e-1)xe^{-x}$ ■

Tóm tắt về nghiệm của phương trình vi phân $ay'' + by' + cy = 0$

Nghiệm của phương trình đặc trưng	Nghiệm tổng quát
$r_1 \neq r_2$ $(nghiệm\ thực)$	$y = C_1e^{r_1x} + C_2e^{r_2x}$
$r_1 = r_2 = r$	$y = C_1e^{rx} + C_2xe^{rx}$
$r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ $(nghiệm\ phức)$	$y = e^{\alpha x}(C_1cos\beta x + C_2sin\beta x)$

6.2. Phương trình vi phân tuyến tính cấp hai không thuần nhất

Trong mục này chúng ta học cách làm thế nào để giải phương trình vi phân tuyến tính cấp hai không thuần nhất hệ số hằng số, tức là phương trình dạng

[1] $\quad ay'' + by' + cy = G(x)$

trong đó a, b và c là các hằng số và G(x) là hàm liên tục. Phương trình thuần nhất tương ứng

[2] $\quad ay'' + by' + cy = 0$

được gọi là phương trình bổ trợ và đóng vai trò quan trọng đối với việc giải phương trình không thuần nhất gốc [1].

[3] **Định lý** Nghiệm tổng quát của phương trình không thuần nhất [1] có thể viết dưới dạng

$$y(x) = y_p(x) + y_c(x)$$

trong đó y_p là nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất [1] và y_c là nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng [2].

Chứng minh Giả sử $y(x)$ là nghiệm tổng quát và $y_p(x)$ là một nghiệm riêng của phương trình [1]. Ta chứng minh $y - y_p$ là nghiệm của phương trình [2]. Thật vậy,

$$a(y-y_p)'' + b(y-y_p)' + c(y-y_p) = ay'' - ay_p' + by' - by_p' + cy - cy_p$$
$$= (ay'' + by' + cy) - (ay_p'' + by_p' + cy_p) = G(x) - G(x) = 0$$

Điều đó chứng tỏ $y - y_p$ là nghiệm của phương trình [2]. Nhưng vì y là nghiệm tổng quát của [1] nên nó chứa hai hằng số, vậy $y - y_p$ chứa hai hằng số, nên nó là ngj tổng quát của phương trình [2]. Tức là $y - y_p = y_c$ hay $y = y_p + y_c$. ■

Từ mục 6.1 chúng ta ta đã biết cách tìm nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất. Định lý 3 nói rằng ta sẽ biết nghiệm tổng quát của phương trình không thuần nhất nếu ta biết được một nghiệm riêng của nó y_p. Có hai phương pháp để tìm nghiệm riêng: Phương pháp hệ số bất định là đơn giản nhưng chỉ chỉ dùng cho một lớp hạn chế các hàm G. Phương pháp đạo hàm các tham số sử dụng cho mọi hàm G nhưng thường khó áp dụng trong thực tế.

6.2.1. Phương pháp hệ số bất định

Trước hết chúng ta minh họa phương pháp hệ số bất định cho phương trình

$$ay'' + by' + cy = G(x)$$

trong đó G(x) là đa thức. Có cơ sở để dự đoán rằng có một nghiệm riêng y_p là đa thức cùng bậc với G bởi vì y là đa thức thì $ay'' + by' + cy$ cũng là đa thức. Vì thế chúng ta thay $y_p(x)$ bởi một đa thức cùng bậc với G vào phương trình vi phân và xác định các hệ số của đa thức đó.

Ví dụ 1 Giải phương trình $y'' + y' - 2y = x^2$

Lời giải Phương trình đặc trưng của $y'' + y' - 2y = 0$ là

$r^2 + r - 2 = (r-1)(r+2) = 0$, có nghiệm $r_1 = 1$ và $r_2 = -2$.

Vì thế nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng là $y_c = C_1e^x + C_2e^{-2x}$

Bởi vì G(x) = x^2 là đa thức bậc 2 nên chúng ta tìm nghiệm riêng dạng

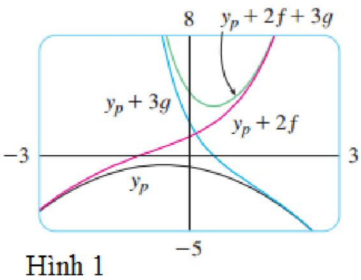
$$y_p = Ax^2 + Bx + C$$

Khi đó $y_p' = 2Ax + B$ và $y_p'' = 2A$, thay vào phương trình vi phân đã cho, ta được

$$(2A) + (2Ax + B) - 2(Ax^2 + Bx + C) = x^2$$

hay $$-2Ax^2 + (2A - hai\ biến)x + (2A + B - 2C) = x^2$$

Các đa thức bằng nhau khi các hệ số bằng nhau, vì vậy



Hình 1

-2A = 1 2A – 2B = 0 2A + B – 2C = 0

Nghiệm của hệ phương trình đại số này là

$$A = -\frac{1}{2} \qquad B = -\frac{1}{2} \qquad C = -\frac{3}{4}$$

Nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất là

$$y_p(x) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$$

và theo Định lý 3, nghiệm tổng quát là

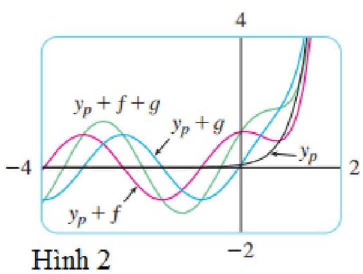
$$y = y_c + y_p = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{4} + C_1e^x + C_2e^{-2x} \qquad \blacksquare$$

Hình 1 thể hiện bốn nghiệm của phương trình vi phân trong Ví dụ 1 theo nghiệm riêng y_p và các hàm $f(x) = e^x$ và $g(x) = e^{-2x}$.

Nếu vế phải của phương trình [1] có dạng Ce^{kx} với C và k là các hằng số, thì chúng ta thử tìm nghiệm riêng cùng dạng đó, $y_p(x) = Ae^{kx}$, bởi vì đạo hàm của e^{kx} bằng hằng số nhân với e^{kx}.

Ví dụ 2 Giải phương trình $y'' + 4y = e^{3x}$

Lời giải Phương trình đặc trưng $r^2 + 4 = 0$ có nghiệm ±i2, vì vậy nghiệm của phương trình thuần nhất tương ứng là $y_c(x) = C_1cos2x + C_2sin2x$.



Hình 2

Ta thử tìm nghiệm riêng dạng $y_p = Ae^{3x}$, khi đó

$$y_p' = 3Ae^{3x} \qquad \text{và} \qquad y_p'' = 9Ae^{3x}.$$

Thay vào phương trình vi phân ta có

$$9Ae^{3x} + 4(3Ae^{3x}) = e^{3x}, \text{ nên } A = \frac{1}{13}, \text{ và } y_p = \frac{1}{13}e^{3x}.$$

Nghiệm tổng quát $y(x) = \frac{1}{13}e^{3x} + C_1cos2x + C_2sin2x$. $\blacksquare$

Hình 2 là đồ thị của các nghiệm của phương trình vi phân trong Ví dụ 2 theo y_p và các hàm f(x) = cos2x và g(x) = sin2x. Chú ý rằng tất cả các nghiệm dần tới ∞ khi x → ∞ và tất cả các nghiệm (loại trừ y_p) giống các hàm sine khi x âm.

Nếu G(x) có dạng của các hàm *Ccoskx* hoặc *Csinkx* thì chúng ta tìm nghiệm riêng dạng

$$y_p(x) = Acoskx + Bsinkx$$

Ví dụ 3 Giải phương trình $y'' + y' - 2y = sinx$

Lời giải Chúng ta thử tìm nghiệm riêng dạng $y_p = Acosx + Bsinx$.

Khi đó $y_p' = -Asinx + Bcosx$ và $y_p'' = -Acosx - Bsinx$

Thay vào phương trình vi phân ta nhận được

(-Acosx – Bsinx) + (-Asinx + Bcosx) – 2(Acosx + Bssinx) = sinx

hay (-3A + B)cosx + (-A – 3B)sinx = sinx

Điều đó đúng nếu -3A + B = 0 và –A – 3B = 1, hay $A = -\frac{1}{10}$ $B = -\frac{3}{10}$

Vậy nghiệm riêng là $y_p = -\frac{1}{10}cosx - \frac{3}{10}sinx$

Trong Ví dụ 1 chúng ta đã xác định nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất là $y_c = C_1e^x + C_2e^{-2x}$, vì vậy nghiệm tổng quát của phương trình ban đầu là

$$y(x) = -\frac{1}{10}(cosx + 3sinx) + C_1e^x + C_2e^{-2x} \quad \blacksquare$$

Nếu G(x) là tích của các hàm thuộc kiểu đã nói ở trên thì chúng ta thử tìm nghiệm dưới dạng tích của các hàm đó. Ví dụ, khi giải phương trình vi phân y" + 2y' + 4y = xcos3x, ta thử tìm nghiệm riêng dạng $y_p = (Ax + B)cos3x + (Cx + D)sin3x$.

Nếu G(x) là tổng của các hàm kiểu đó, chúng ta dễ dàng kiểm tra nguyên lý chồng chất nghiệm, rằng nếu y_{p_1} và y_{p_2}tương ứng là các nghiệm của các phương trình vi phân

$$ay'' + by' + cy = G_1(x) \quad \text{và} \quad ay'' + by' + cy = G_2(x)$$

thì $y_{p_1} + y_{p_2}$ là nghiệm của phương trình vi phân $ay'' + by' + cy = G_1(x) + G_2(x)$

Ví dụ 4 Giải phương trình $y'' - 4y = xe^x + cos2x$

Lời giải Phương trình đặc trưng $r^2 - 4 = 0$ có các nghiệm ±2, vì vậy nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng là $y_c = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x}$.

Với phương trình $y'' - 4y = xe^x$, ta tìm nghiệm riêng dạng $y_{p_1} = (Ax + B)e^x$, khi đó

$y_{p_1}' = (Ax + A + B)e^x$, $y_{p_1}'' = (Ax + 2A + B)e^x$, thay vào phương trình đã cho

$(Ax + 2A + B)e^x - 4(Ax + B)e^x = xe^x$ hay $(-3Ax + 2A - 3B)e^x = xe^x$

Vì vậy -3A = 1 và 2A – 3B = 0, nên $A = -\frac{1}{3}, B = -\frac{2}{9}$ và $y_{p_1} = \left(-\frac{1}{3}x - \frac{2}{9}\right)e^x$

Đối với phương trình $y'' - 4y = cos2x$, ta tìm nghiệm riêng dạng

$$y_{p_2} = Ccos2x + Dsin2x$$

Khi đó $y_{p_2}' = -2Csin2x + 2Dcos2x$, $y_{p_2}'' = -4Ccos2x - 4Dsin2x$

Thay vào phương trình vi phân $y'' - 4y = cos2x$ ta được

$$-4Ccos2x - 4Dsin2x - 4\left(y_{p_2} = Ccos2x + Dsin2x\right) = cos2x$$

hay $-8Ccos2x - 8Dsin2x = cos2x$

Do đó $C = -\frac{1}{8}$ và D = 0, nên $y_{p_2} = -\frac{1}{8}cos2x$

Theo nguyên lý chồng chất nghiệm, nghiệm tổng quát là

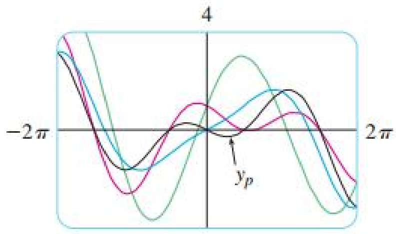
$$y = -\left(\frac{1}{3}x + \frac{2}{9}\right)e^x - \frac{1}{8}cos2x + C_1e^{2x} + C_2e^{-2x} \quad \blacksquare$$

Cuối cùng, chúng ta chú ý rằng đôi khi nghiệm thử đề xuất lại là nghiệm của phương trình thuần nhất và do đó không thể là nghiệm của phương trình không thuần nhất. Trong trường hợp như vậy chúng ta nhân nghiệm đề xuất với x (hoặc x^2 nếu cần).

Ví dụ 5 Giải phương trình y'' + y = sinx

Lời giải Phương trình đặc trưng $r^2 + 1 = 0$ có các nghiệm $\pm i$, vì vậy nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng là $y_c(x) = C_1 cosx + C_2 sinx$

Thông thường, chúng ta thử tìm nghiệm riêng dạng $y_p(x) = Acosx + Bsinx$, nhưng chúng ta nhận được nghiệm của phương trình thuần nhất, vì thế chúng ta thử với



Hình 4

$y_p(x) = (Ax)cosx + (Bx)sinx$, khi đó

$y_p'(x) = (Bx + A)cosx + (-Ax + B)sinx$

$y_p''(x) = (-Ax + 2B)cosx + (-Bx - 2A)sinx$

Thay vào phương trình vi phân ta có

$$y_p'' + y_p = -2Asinx + 2Bcosx = sinx$$

Vì vậy $A = -\frac{1}{2}$, $B = 0$ và $y_p(x) = -\frac{1}{2}xcosx$

Nghiệm tổng quát của phương trình không thuần nhất là

$$y = -\frac{1}{2}xcosx + C_1 cosx + C_2 sinx \qquad \blacksquare$$

Hình 4 là đồ thị của một số nghiệm riêng trong Ví dụ 5.

Tóm tắt phương pháp hệ số bất định

1. Nếu $G(x) = e^{\alpha x}P(x)$: Ký hiệu Q, R là các đa thức cùng bậc với P(x), hệ số chưa xác định.
   (a) Nếu α không phải là nghiệm của phương trình đặc trưng
   $$y_p(x) = e^{\alpha x}Q(x)$$
   (b) Nếu α là nghiệm đơn của phương trình đặc trưng
   $$y_p(x) = [e^{\alpha x}Q(x)]x$$
   (c) Nếu α là nghiệm kép của phương trình đặc trưng
   $$y_p(x) = [e^{\alpha x}Q(x)]x^2$$
2. Nếu $G(x) = \cos\beta x\, P(x)$ hoặc $G(x) = \sin\beta x\, P(x)$
   (a) Nếu ±iβ không là nghiệm của phương trình đặc trưng
   $$y_p(x) = \cos\beta x\, Q(x) + \sin\beta x\, R(x)$$
   (b) Nếu ±iβ là nghiệm của phương trình đặc trưng
   $$y_p(x) = [\cos\beta x\, Q(x) + \sin\beta x\, R(x)]x = \cos\beta x\, Q(x)x + \sin\beta x\, R(x)x$$
3. Nếu $G(x) = e^{\alpha x}\cos\beta x\, P(x)$

Đặt $y = ue^{\alpha x}$ thì $y' = (u' + \alpha u)e^{\alpha x}$ và $y'' = (u'' + 2\alpha u' + \alpha^2 u)e^{\alpha x}$, thay vào ta được

$$a(u'' + 2\alpha u' + \alpha^2 u)e^{\alpha x} + b(u' + \alpha u)e^{\alpha x} + cue^{\alpha x} = e^{\alpha x}\cos\beta x\, P(x)$$

hay $$au'' + (2a\alpha + b)u' + (a\alpha^2 + b\alpha + c)u = \cos\beta x\, P(x)$$

Tức là ta đa đưa về trường hợp thứ 2 theo hàm cần tìm là *u*. Giải phương trình cuối cùng ta nhận được u(x), khi đó nghiệm riêng của phương trình vi phân ban đầu là $y(x) = u(x)e^{\alpha x}$

Ví dụ 6 Giải phương trình $y'' - 4y' + 13y = e^{2x}cos3x$

Lời giải Ở đây G(x) có dạng 3 trong phần tóm tắt, với α = 2, β = 3 và P(x) = 1.

Vì vậy, ta đặt $y = ue^{2x}$, khi đó $y' = (u' + 2u)e^{2x}$, $y'' = (u'' + 4u' + 4u)e^{2x}$.

Thay vào ta được $(u'' + 4u' + 4u)e^{2x} - 4(u' + 2u)e^{2x} + 13ue^{2x} = e^{2x}cos3x$

hay $u'' + 9u = cos3x$. Phương trình đặc trưng $r^2 + 9 = 0$ có các nghiệm $r_{1,2} = \pm i3$.

Vì $\pm i\beta = \pm i3$ là nghiệm của phương trình đặc trưng nên ta tìm nghiệm riêng dạng

$$u_p = cos3x[Ax] + sin3x[Bx],$$

khi đó $u_p' = cos3x[3Bx + A] + sin3x[-3Ax + B]$

$$u_p'' = cos3x[-9Ax + 6B] + sin3x[-9Bx - 6A]$$

Thay vào phương trình vi phân của u, ta được

$$cos3x[-9Ax + 6B] + sin3x[-9Bx - 6A] + 9\big[cos3x[Ax] + sin3x[Bx]\big] = cos3x$$

hay $cos3x[(0)x + 6B] + sin3x[(0)x - 6A] = cos3x$

Do đó 6B = 1, -6A = 0, hay A = 0, B = $\frac{1}{6}$. Vậy $u_p = sin3x[\frac{1}{6}x]$.

Nghiệm riêng của phương trình vi phân đã cho là $y_p = u_p(x)e^{2x} = \frac{1}{6}xsin3x.$

Phương trình đặc trưng $r^2 - 4r + 13 = (r-2)^2 + 9 = 0$ có nghiệm $r_{1,2} = 2 \pm i3$ nên nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng là

$$y_c(x) = e^{2x}(C_1cos3x + C_2sin3x)$$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình vi phân không thuần nhất đã cho là

$$y = \frac{1}{6}xsin3x + e^{2x}(C_1cos3x + C_2sin3x)$$ ■

6.2.2. Phương pháp biến thiên tham số

Giả sử rằng chúng ta đã giải được phương trình thuần nhất $ay'' + by' + cy = 0$ và viết nghiệm tổng quát của nó là

[4] $$y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$$

trong đó y_1 và y_2 là các nghiệm độc lập tuyến tính. Chúng ta thay các hằng số (hay tham số) C_1 và C_2 trong phương trình 4 bởi các hàm tùy ý $u_1(x)$ và $u_2(x)$. Chúng ta tìm nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất $ay'' + by' + cy = G(x)$ dưới dạng

[5] $$y_p(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x)$$

(Phương pháp này được gọi là biến thiên tham số vì chúng ta cho các tham số C_1 và C_2 biến thiên như các hàm số.) Đạo hàm phương trình [5] ta nhận được

[6] $$y_p'(x) = (u_1'y_1 + u_2'y_2) + (u_1y_1' + u_2y_2')$$

Bởi vì u_1 và u_2 là các hàm tùy ý nên chúng ta có thể áp đặt hai điều kiện lên chúng. Một điều kiện là y_p là nghiệm của phương trình vi phân, một điều kiện khác được đưa ra để đơn giản việc tính toán. Từ dạng của biểu thức trong phương trình [6], chúng ta áp đặt điều kiện

[7] $$u_1'y_1 + u_2'y_2 = 0$$

Khi đó $y_p'' = u_1'y_1' + u_2'y_2' + u_1y_1'' + u_2y_2''$

Thay vào phương trình vi phân ta nhận được

[8] $$u_1(ay_1'' + by_1' + cy_1) + u_2(ay_2'' + by_2' + cy_2) + a(u_1'y_1' + u_2'y_2') = G$$

Nhưng y_1 và y_2 là các nghiệm của phương trình thuần nhất nên

$$ay_1'' + by_1' + cy_1 = 0 \quad \text{và} \quad ay_2'' + by_2' + cy_2 = 0$$

Và phương trình [8] được đơn thành

[9] $$a(u_1'y_1' + u_2'y_2') = G$$

Giải hệ hai phương trình [7] và [9] ta nhận được các hàm u_1' và u_2', sau khi tích phân ta nhận được u_1 và u_2 và cuối cùng ta nhận được nghiệm riêng theo phương trình [5].

Ví dụ 7 Giải phương trình $y'' + y = tanx, 0 < x < \pi/2$

Lời giải Phương trình đặc trưng $r^2 + 1 = 0$ có các nghiệm ±i, vì thế nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng là $y_c(x) = C_1 sinx + C_2 cosx$. Sử dụng phương pháp biến thiên tham số, ta tìm nghiệm riêng dưới dạng $y_p(x) = u_1(x)sinx + u_2(x)cosx$. Khi đó

$$y_p' = (u_1' \sin x + u_2' \cos x) + (u_1 \cos x - u_2 \sin x)$$

Đặt

[10] $$u_1' sinx + u_2' cosx = 0$$

Thì $y_p''(x) = u_1' cosx - u_2' sinx - u_1 sinx - u_2 cosx$

Để y_p là nghiệm ta phải có

[11] $$y_p'' + y_p = u_1' cosx - u_2' sinx = tanx$$

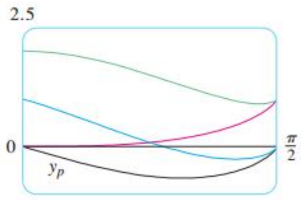
Nhân phương trình [10] với sinx và phương trình [11] với cosx rồi cộng lại ta được

$$u_1'(\sin^2 x + \cos^2 x) = cosxtanx \qquad u_1' = sinx \qquad u_1 = -cosx$$

(Chúng ta tìm một nghiệm riêng nên không cần thiết tới hằng số của tích phân)

Từ phương trình [10] ta nhận được

$$u_2' = -\frac{sinx}{cosx} u_1' = -\frac{\sin^2 x}{cosx} = -\frac{\cos^2 x - 1}{cosx} = cosx - secx$$



Hình 5

Vì vậy, $u_2(x) = sinx - \ln(secx + tanx)$

(Chú ý rằng sec x + tan x > 0 đối với 0 < x < π/2)

Do đó

$$y_p(x) = -\cos x \sin x + [\sin x - \ln(\sec x + \tan x)] \cos x$$
$$= -\cos x \ln(\sec x + \tan x)$$

Nghiệm tổng quát là

$$y(x) = -\cos x \ln(\sec x + \tan x) + C_1 \sin x + C_2 \cos x \qquad ■$$

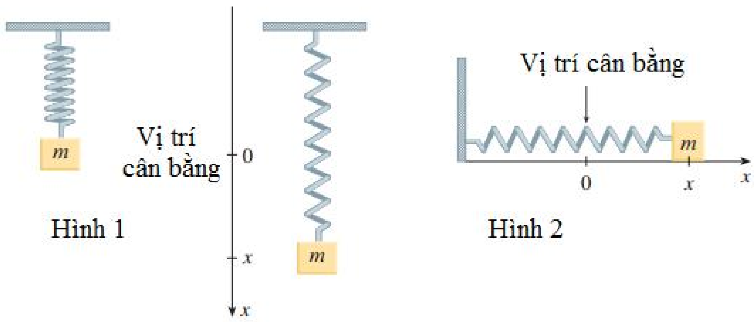
Hình 5 là đồ thị của bốn nghiệm riêng của phương trình trong Ví dụ 7.

6.3. Ứng dụng của phương trình vi phân cấp hai

Phương trình vi phân tuyến tính cấp hai có nhiều ứng dụng trong khoa học và kỹ thuật. Trong mục này chúng ta khám phá hai ứng dụng: dao động của lò xo và mạch điện.

6.3.1. Dao động của lò xo

Chúng ta xem xét chuyển động của một vật có khối lượng *m* tại một đầu của một cái lò xo hoặc là thẳng đứng (như trong Hình 1) hoặc nằm ngang trên một bề mặt bằng phẳng (như trong Hình 2).



Hình 1 Hình 2

Theo Định luật Hooke, nếu lò xo được kéo giãn (hoặc nén) *x* đơn vị chiều dài tự nhiên của nó, thì nó tạo nên một lực tỷ lệ thuận với *x*: $F_{\text{đàn hồi}} = -kx$

trong đó *k* là hằng số dương (được gọi là hệ số co giãn). Nếu chúng ta bỏ qua mọi lực cản (sức cản không khí hoặc ma sát), thì theo Định luật thứ hai của Newton (**F** = *m***a**), ta có

[1] $$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \qquad \text{hay} \qquad m\frac{d^2x}{dt^2} + \text{kx} = 0$$

Đây là phương trình vi phân tuyến tính cấp hai. Phương trình đặc trưng là $mr^2 + k = 0$ với các nghiệm $r = \pm i\omega$, trong đó $\omega = \sqrt{k/m}$. Vì vậy nghiệm tổng quát là

$x(t) = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t$, có thể viết lại là $x(t) = A\cos(\omega t + \delta)$

trong đó

$\omega = \sqrt{k/m}$ (tần số), $A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$ (biên độ), $\cos\delta = \frac{C_1}{A}$, $\sin\delta = -\frac{C_2}{A}$ (δ là góc pha)

Đây là loại chuyển động được gọi là dao động điều hòa (*simple harmonic motion*).

Ví dụ 1 Một lò xo khối lượng 2kg có độ dài tự nhiên 0.5m. Một lực 25.6N là cần thiết để duy trì kéo dài lò xo đến độ dài 0.7m. Nếu lò xo được kéo dài tới độ dài 0.7m và sau được thả ra với vận tốc ban đầu 0, tìm vị trí của vật thể tại thời điểm t bất kỳ.

Lời giải Từ Định luật Hooke, lực cần thiết để kéo giãn lò xo là k(0.2) = 25.6, nên k = 128. Sử dụng giá trị này của k cùng với m = 2 vào phương trình [1] ta có

$$2\frac{d^2x}{dt^2} + 128x = 0$$

Như đã trình bày chung gần đây, nghiệm của phương trình này là

[2] $x(t) = C_1 \cos 8t + C_2 \sin 8t$

Chúng ta có điều kiện đầu x(0) = 0.2. Nhưng từ phương trình [2], x(0) = C_1, vì vậy C_1 = 0.2. Đạo hàm phương trình [2] ta được

$$x'(t) = -8C_1 \sin 8t + 8C_2 \cos 8t$$

Bởi vì vận tốc ban đầu là x'(0) = 0 nên C_2 = 0, và vì vậy $x(t) = \frac{1}{5}\cos 8t$ ■

6.3.2. Dao động tắt dần

Tiếp theo chúng ta xem xét chuyển động của một lò xo chịu một lực ma sát (trong trường hợp lò xo nằm ngang như Hình 2) hoặc lực giảm chấn (trong trường hợp một lò xo dọc di chuyển thông qua một chất lỏng như trong Hình 3). Một ví dụ về lực giảm chấn là giảm xóc trong một chiếc xe ô tô hoặc một chiếc xe đạp.

Chúng ta giả định rằng lực giảm chấn là tỷ lệ thuận với vận tốc của vật và tác động ngược chiều với chuyển động. (Điều này đã được khẳng định bởi, một số thí nghiệm vật lý.) Vì vậy

$$F_{\text{giảm chấn}} = -c\frac{dx}{dt}$$

trong đó c là hằng số dương, được gọi là hệ số giảm chấn. Vì vậy trong trường hợp này, Định lý thứ hai của Newton cho ra

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F_{\text{đàn hồi}} + F_{\text{giảm chấn}} = -kx - c\frac{dx}{dt}$$

hay

[3] $$m\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + kx = 0$$

Phương trình [3] là phương trình vi phân tuyến tính cấp hai, phương trình đặc trưng của nó là $mr^2 + của + k = 0$. Nghiệm cả phương trình đặc trưng là

[4] $$r_1 = \frac{-c + \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m} \qquad r_2 = \frac{-c - \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m}$$

Theo mục 6.1 chúng ta cần thảo luận vấn đề này.

Trường hợp 1 $c^2 - 4mk > 0$ (giảm chấn già)

Trong trường hợp này, r_1 và r_2 là những số thực khác nhau, và $x = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}$

Bởi vì c, m và k đều là các số dương, ta có $\sqrt{c^2 - 4mk} < c$, nên r_1 và r_2 được cho bởi phương trình [4] đều âm. Điều đó chứng tỏ rằng x → 0 khi t → ∞. Các đồ thị điển hình của x như là hàm của t được chỉ ra trên Hình 4. Chú ý rằng các dao động không xảy ra. (Có thể cho vật đi qua vị trí cân bằng một lần, nhưng chỉ một lần.) Điều này là do $c^2 > 4mk$ có nghĩa là có một lực giảm chấn mạnh (dầu độ nhớt cao hoặc mỡ) so với một lò xo yếu hoặc vật nhỏ.

Trường hợp 2 $c^2 - 4mk = 0$ (giảm chấn tới hạn)

Trường hợp này tương ứng với nghiệm $r_1 = r_2 = -\frac{c}{2m}$, và nghiệm là

$$x = (C_1 + C_2 t)e^{-(c/2m)t}$$

Tương tự như Trường hợp 1, các đồ thị điển hình giống như trong Hình 4 (xem bài tập 12), nhưng giảm xóc là vừa đủ để ngăn chặn rung động. Bất kỳ giảm độ nhớt của chất lỏng dẫn đến sự rung động của các trường hợp sau đây.

Trường hợp 3 $c^2 - 4mk < 0$ (giảm chấn non)

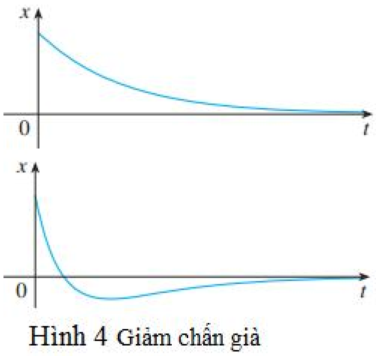
Phương trình đặc trưng có hai nghiệm phức

$$r_{1,2} = -\frac{c}{2m} \pm i\omega \qquad \text{ở đây} \quad \omega = \frac{\sqrt{4mk - c^2}}{2m}$$

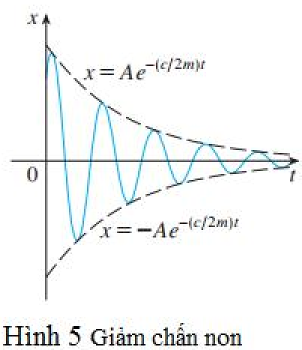
Nghiệm được cho bởi

$$x = e^{-(C/2m)t}(C_1 \cos \omega t) + C_2 \sin \omega t$$

Chúng ta thấy rằng những dao động là giảm dần bởi nhân tố $e^{-\left(\frac{c}{2m}\right)t}$. Bởi vì c > 0 và m > 0, chúng ta có –(c/2m) < 0 nên $e^{-\left(\frac{c}{2m}\right)t} \to 0$ khi t → ∞. Điều đó bao hàm x → 0 khi t → ∞, nghĩa là chuyển động giảm dần về 0 khi t tăng. Một đồ thị điển hình được chỉ ra trên Hình 5.



Hình 4 Giảm chấn già

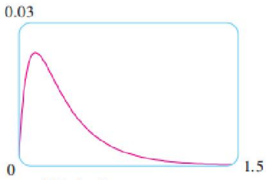


Hình 5 Giảm chấn non

Ví dụ 2 Giả sử lò xo trong Ví dụ 1 được ngâm trong một chất lỏng với hệ số giảm chấn c = 40. Tìm vị trí của vật thể tại thời điểm bất kỳ t nếu nó bắt đầu từ vị trí cân bằng và được đẩy với vận tốc ban đầu 0.6 m/s.

Lời giải Từ Ví dụ 1, với *m* = 2 và *k* = 128 nên pt vp [3] trở thành

$$2\frac{d^2x}{dt^2} + 40\frac{dx}{dt} + 128x = 0 \qquad \text{hay} \qquad \frac{d^2x}{dt^2} + 20\frac{dx}{dt} + 64x = 0$$



Hình 6

Phương trình đặc trưng $r^2 + 20r + 64 = 0$ có các nghiệm –4 và –16 nên chuyển động là tắt dần và nghiệm là

$$x(t) = C_1e^{-4t} + C_2e^{-16t}.$$

Chúng ta có $x(0) = 0$ nên $C_1 + C_2 = 0$.

Lấy đạo hàm ta nhận được

$$x'(t) = -4C_1e^{-4t} - 16C_2e^{-16t} \quad \text{nên} \quad x'(0) = 4C_1 - 16C - 2 = 0.6$$

Bởi vì $C_2 = -C_1$, nên $12C_1 = 0.6$ hay $C_1 = 0.05$. Do đó $x = 0.05(e^{-4t} - e^{-16t})$. ■

Hình 6 là đồ thị của hàm vị trí đối với chuyển động tắt dần trong Ví dụ 2.

6.3.3. Dao động cưỡng bức

Giả sử rằng, ngoài các lực đàn hồi và lực giảm chấn, sự chuyển động của lò xo bị ảnh hưởng bởi một ngoại lực *F*(t). Khi đó, Định luật thứ hai của Newton cho

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F_{\text{đàn hồi}} + F_{\text{giảm chấn}} + F_{\text{ngoài}} = -kx - c\frac{dx}{dt} + F(t)$$

Vì vậy, thay vì phương trình thuần nhất [3], chuyển động của lò xo được điều chỉnh thành phương trình vi phân không thuần nhất sau:

[5] $$m\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + kx = F(t)$$

Chuyển động của lò xo có thể được xác định bởi phương pháp ở mục 6.2.

Một loại thường xảy ra của ngoại lực là hàm lực tuần hoàn

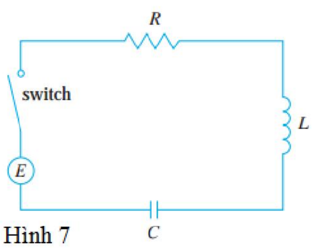
$$F(t) = F_0 \cos\omega_0 t \qquad \text{với} \quad \omega_0 \neq \omega = \sqrt{k/m}$$

Trong trường hợp này, và khi không có lực giảm chấn (c = 0), sử dụng phương pháp hệ số bất định chỉ ra rằng

[6] $$x(t) = C_1\cos\omega t + C_2\sin\,\omega t + \frac{F_0}{m(\omega^2 - \omega_0^2)}\cos\omega_0 t$$

Nếu $\omega_0 = \omega$ thì tần số áp dụng tăng cường tần số tự nhiên và kết quả là rung động với biên độ lớn, đây là hiện tượng cộng hưởng.

6.3.4. Mạch điện



Hình 7

Tại mục 5.3 và 5.5, chúng ta đã có thể sử dụng các phương trình vi phân phân ly và tuyến tính cấp một để phân tích mạch điện chứa một điện trở và cuộn cảm (xem Hình 5 tại mục 5.3 hoặc Hình 4 tại mục 5.5), hoặc một điện trở và tụ điện (xem bài tập 29 tại mục 5.5). Bây giờ chúng ta phân tích các mạch hiển thị trong Hình 7 và sẽ sử dụng phương pháp giải phương trình vi phân tuyến tính cấp hai để giải các bài toán liên quan. Hình 7 chứa một nguồn điện E (cung cấp bởi một pin hoặc máy phát điện), một điện trở R, một cuộn cảm L và một tụ điện C. Nếu điện dung trên tụ điện tại thời điểm t là $Q = Q(t)$, thì dòng điện là tốc độ thay đổi của Q theo t: $I = dQ/dt$. Như trong phần 5.5, nó được biết đến từ vật lý rằng hiệu điện thế trên điện trở, cuộn cảm và tụ điện tương ứng là *RI* *LdI/dt* *Q/C*

Định luật Kirchhoff nói rằng tổng các hiệu điện thế đó bằng điện áp đã cung cấp

$$L\frac{dI}{dt} + RI + \frac{Q}{C} = E(t)$$

Vì $I = dQ/dt$ nên phương trình trở thành

[7] $$L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C}Q = E(t)$$

đó là phương trình vi phân tuyến tính cấp hai hệ số hằng số. Nếu điện dung Q_0 và dòng điện I_0 là các giá trị tại t = 0 thì chúng ta có các điều kiện đầu $Q(0) = Q_0$ $\quad Q'(0) = I(0) = I_0$ và bài toán giá trị đầu có thể được giải bằng phương pháp trong mục 6.2.

Phương trình vi phân đối với dòng điện có thể nhận được bằng cách đạo hàm phương trình [7] theo t và lưu ý rằng I = dQ/dt:

$$L\frac{d^2I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}I = E(t)$$

Ví dụ 3 Tính điện dung và dòng điện tại thời điểm t trong mạch điện của Hình 7 nếu R = 40 Ω, L = 1 H, C = 16×10^{-4} F, E(t) = 100 cos 10t và diện dung với dòng điện ban đầu bằng 0

Lời giải Với các giá trị đã cho của L, R, C và E(t), phương trình [7] trở thành

[8] $$\frac{d^2Q}{dt^2} + 40\frac{dQ}{dt} + 625Q = 100\cos 10t$$

Phương trình đặc trưng là $r^2 + 40r + 625 = 0$ có các nghiệm

$$r_{1,2} = \frac{-40 \pm \sqrt{-900}}{2} = -20 \pm i15$$

vì vậy nghiệm của phương trình thuần nhất là $\quad Q_c(t) = e^{-20t}(C_1\cos 15t + C_2\sin 15t)$

Chúng ta tìm nghiệm riêng dạng $\quad Q_p(t) = A\cos 10t + B\sin 10t$

Khi đó $\quad Q_p'(t) = -10A\sin 10t + 10B\cos 10t$

$$Q_p''(t) = -100A\cos 10t - 100B\sin 10t$$

Thay vào phương trình [8] ta được

$$(-100A\cos 10t - 100B\sin 10t) + 20(-10A\sin 10t + 10B\cos 10t)$$
$$+625(A\cos 10t + B\sin 10t) = 100\cos 10t$$

Cân bằng các hệ số ta có

$\begin{cases} 525A + 400B = 100 \\ -400A + 525B = 0 \end{cases}$ hay $\begin{cases} 21A + 16B = 4 \\ -16A + 21B = 0 \end{cases}$ Nghiệm của hệ là $\begin{cases} A = 84/697 \\ B = 64/697 \end{cases}$

Vì vậy nghiệm riêng là

$$Q_p(t) = \tfrac{1}{697}(84\cos 10t + 64\sin 10t)$$

Và nghiệm tổng quát là

$$Q(t) = \tfrac{1}{697}(84\cos 10t + 64\sin 10t) + e^{-20t}(C_1\cos 15t + C_2\sin 15t)$$

Áp điều kiện đầu Q(0) = 0, ta nhận được

$$Q(0) = C_1 + \tfrac{84}{697} = 0 \quad \text{nên} \quad C_1 = -\tfrac{84}{697}$$

Để áp điều kiện khác, ta đạo hàm để tìm dòng điện

$$I = \frac{dQ}{dt} = \frac{40}{697}(-21\sin 10t + 16\cos 10t)$$
$$+ e^{-20t}[(-20C_1 + 15C_2)\cos 15t + (-15C_1 - 20C_2)\sin 15t]$$

$$I(0) = -20C_1 + 15C_2 + \tfrac{640}{697} = 0 \qquad C_2 = -\tfrac{464}{2091}$$

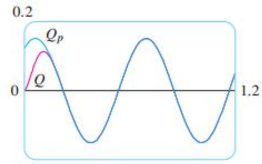
Vì vậy công thức của điện dung là

$$Q(t) = \frac{4}{697}\left[(21\cos 10t + 16\sin 10t) - \frac{1}{3}e^{-20t}(63\cos 15t + 116\sin 15t)\right]$$

và biểu thức cho dòng điện là

$$I = \frac{1}{2091}\left[120(-21\sin 10t + 16\cos 10t) + \ e^{-20t}\left(-1920\cos 15t + \tfrac{1306}{100}\sin 15t\right)\right]$$

Chú ý 1 Trong Ví dụ 3, nghiệm Q(t) bao gồm hai phần. Bởi vì $e^{-20t} \to 0$ khi $t \to \infty$ và cả cos15t và sin15t là bị chặn nên $Q(t) \to 0$ khi $t \to \infty$. Vì thế với giá trị t đủ lớn $Q(t) \approx Q_p(t) = \frac{4}{697}(21\cos 10t + 16\sin 10t)$ và vì thế $Q_p(t)$ được gọi là nghiệm ổn định. Hình 8 so sánh đồ thị của nghiệm ổn định với đồ thị của Q trong trường hợp này.



Hình 8

Chú ý 2 So sánh các phương trình [5] và [7], chúng ta thấy rằng về phương diện toán học chúng giống nhau. Điều này cho thấy sự tương tự được đưa ra trong biểu đồ sau đây giữa các trạng thái vật lý mà ở cái nhìn đầu tiên, là rất khác nhau.

Hệ thống lò xo		Mạch điện	
x	khoảng cách	*Q*	điện dung
dx/dt	vận tốc	*I = dQ/dt*	dòng điện
m	khối lượng	*L*	điện cảm
c	hệ số giảm chấn	*R*	điện trở
k	hệ số co giãn	*1/C*	nghịch dung
F(t)	ngoại lực	*E(t)*	sức điện động

Chúng ta cũng có thể chuyển những ý tưởng khác từ tình huống này đến tình huống khác. Ví dụ, nghiệm ổn định được thảo luận trong Chú ý 1 có ý nghĩa trong hệ thống lò xo. Và hiện tượng cộng hưởng trong hệ thống lò xo có thể hữu ích khi chuyển sang mạch điện như cộng hưởng điện.

6.4. Nghiệm dạng chuỗi

Nhiều phương trình vi phân không thể được giải tường minh bởi sự kết hợp hữu hạn các hàm đơn giản quen thuộc. Điều này đúng ngay cả đối với một phương trình nom đơn giản như

[1] $$y'' - 2xy' + y = 0$$

Nhưng việc giải các phương trình như phương trình [1] là rất quan trọng bởi vì nó phát sinh từ các bài toán vật lý và đặc biệt, trong sự liên quan tới phương trình Schrödinger trong cơ học lượng tử. Trong trường hợp như vậy chúng ta sử dụng phương pháp chuỗi lũy thừa, có nghĩa là, chúng ta tìm nghiệm dưới dạng

$$y = f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \cdots$$

Phương pháp này là thay biểu thức vào phương trình vi phân và xác định các hệ số c_0, c_1, c_2, ... Kỹ thuật này giống như phương pháp hệ số bất định đã thảo luận trong mục 6.2.

Trước khi sử dụng chuỗi lũy thừa để giải phương trình [1], chúng ta minh họa phương pháp bởi một phương trình đơn giản hơn, y'' + y = 0. Thực tế là chúng ta đã biết cách giải phương trình này bởi kỹ thuật ở mục 6.1, nhưng phương pháp chuỗi lũy thừa sẽ dễ hiểu hơn khi áp dụng cho phương trình đơn giản này.

Ví dụ 1 Sử dụng chuỗi lũy thừa để giải phương trình y" + y = 0.

Lời giải Chúng ta giả sử nghiệm có dạng

[2] $$y = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} c_nx^n$$

Chúng ta đạo hàm từng từ của chuỗi lũy thừa

$$y' = c_1 + 2c_2x + 3c_3x^2 + 4c_4x^3 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} nc_nx^{n-1}$$

[3] $$y'' = 2c_2 + 2.3c_3x + 3.4c_4x^2 + \cdots = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_nx^{n-2}$$

Để so sánh các biểu thức của y và y" dễ hơn, ta viết lại y" như sau

[4] $$y'' = \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)c_{n+2}x^n$$

Thay các biểu thức ở các phương trình 2 và 4 vào phương trình vi ta nhận được

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)c_{n+2}x^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_nx^n = 0$$

hoặc

[5] $$\sum_{n=0}^{\infty}[(n+2)(n+1)c_{n+2} + c_n]x^n = 0$$

Nếu hai chuỗi lũy thừa bằng nhau thì các hệ số tương ứng phải bằng nhau. Do đó các hệ số của x^n trong phương trình [5] phải bằng 0, $(n+2)(n+1)c_{n+2} + c_n = 0$, hay

[6] $$c_{n+2} = \frac{c_n}{(n+2)(n+1)} \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Phương trình [6] đường cong gọi là đệ quy. Nếu c_0 và c_1 là đã biết thì phương trình này cho phép xác định các hệ số còn lại theo cách đệ quy bằng cách đặt n = 0, 1, 2, 3, ... tiếp theo.

Đặt n = 0: $c_2 = -\frac{c_0}{1.2} = -\frac{c_0}{2!}$

Đặt n = 1: $c_3 = -\frac{c_1}{2.3} = -\frac{c_1}{3!}$

Đặt n = 2: $c_4 = -\frac{c_2}{3.4} = \frac{c_0}{2!.3.4} = \frac{c_0}{4!}$

Đặt n = 3: $c_5 = -\frac{c_3}{4.5} = \frac{c_1}{3!.4.5} = \frac{c_1}{5!}$

Đặt n = 4: $c_6 = -\frac{c_4}{5.6} = -\frac{c_0}{4!.5.6} = -\frac{c_0}{6!}$

Đặt n = 5: $c_7 = -\frac{c_5}{6.7} = -\frac{c_1}{5!.6.7} = -\frac{c_1}{7!}$

Vì thế chúng ta nhận thấy

Với hệ số có chỉ số chẵn, $c_{2n} = (-1)^n \frac{c_0}{(2n)!}$

Với hệ số có chỉ số lẻ, $c_{2n+1} = (-1)^n \frac{c_1}{(2n+1)!}$

Đặt các giá trị đó vào phương trình [2], ta viết nghiệm là

$$y = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4 + c_5x^5 + \cdots$$

$$= c_0\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots\right)$$

$$+c_1\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots\right)$$

$$= c_0\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + c_1\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Trong đó có hai hằng số tùy ý là c_0 và c_1, nên đây chính là nghiệm tổng quát ■

Chú ý 1 Chúng ta nhận thấy nghiệm chuỗi nhận được là chuỗi Malaurin của cosx và sinx. Do đó ta có thể viết lại nghiệm như sau

$$y(x) = c_0\cos x + c_1\sin x$$

Nhưng không phải luôn luôn có thể biểu diễn các nghiệm chuỗi lũy thừa của phương trình vi phân theo các hàm đã biết.

Ví dụ 2 Giải phương trình y'' – 2xy' + y = 0

Lời giải Chúng ta giả sử nghiệm có dạng

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_nx^n$$

Khi đó $y' = \sum_{n=1}^{\infty} nc_nx^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} nc_nx^{n-1}$

và $y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_nx^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)c_{n+2}x^n$

Thay vào phương trình vi phân ta nhận được

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)c_{n+2}x^n - 2x\sum_{n=0}^{\infty} nc_nx^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_nx^n = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)c_{n+2}x^n - \sum_{n=0}^{\infty} 2nc_nx^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_nx^n = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}[(n+2)(n+1)c_{n+2} - (2n-1)c_n]x^n = 0$$

Phương trình này là đúng nếu các hệ số của x^n bằng 0:

$$(n+2)(n+1)c_{n+2} - (2n-1)c_n = 0$$

[7] $$c_{n+2} = \frac{2n-1}{(n+2)(n+1)}c_n$$

Giải quan hệ đệ quy bằng cách đặt liên tiếp n = 0, 1, 2, 3, ... vào phương trình [7]:

Đặt n = 0: $c_2 = -\frac{1}{1.2}c_0 = -\frac{1}{2!}c_0$

Đặt n = 1: $c_3 = \frac{1}{2.3}c_1 = \frac{1}{3!}c_1$

Đặt n = 2: $c_4 = \frac{3}{3.4}c_2 = -\frac{3}{2!3.4}c_0 = -\frac{3}{4!}c_0$

Đặt n = 3: $c_5 = \frac{5}{4.5}c_3 = \frac{1.5}{3!4.5}c_1 = \frac{1.5}{5!}c_1$

Đặt n = 4: $c_6 = \frac{7}{5.6}c_4 = -\frac{3.7}{4!5.6}c_0 = -\frac{3.7}{6!}c_0$

Đặt n = 5: $c_7 = \frac{9}{6.7}c_5 = \frac{1.5.9}{5!6.7}c_1 = \frac{1.5.9}{7!}c_1$

Đặt n = 6: $c_8 = \frac{11}{7.8}c_6 = -\frac{3.7.11}{6!7.8}c_0 = -\frac{3.7.11}{8!}c_0$

Đặt n = 7: $c_9 = \frac{13}{8.9}c_7 = \frac{1.5.9.13}{9!}c_1$

Tổng quát, các hệ số chỉ số chẵn là

$$c_{2n} = -\frac{3.7.11.\dots.(4n-5)}{(2n)!}c_0$$

và các hệ số chỉ số lẻ là

$$c_{2n+1} = -\frac{1.5.9.\dots.(4n-3)}{(2n+1)!}c_1$$

Nghiệm là

$$y = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4 + c_5x^5 + \cdots$$

$$= c_0\left(1 - \frac{1}{2!}x^2 - \frac{3}{4!}x^4 - \frac{3.7}{6!}x^6 - \frac{3.7.11}{8!}x^8 \dots\right)$$

$$+c_1\left(x + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1.5}{5!}x^5 + \frac{1.5.9}{7!}x^7 + \frac{1.5.9.13}{9!}x^9 \dots\right)$$

hoặc

$$[8]\;\; y = c_0\left(1 - \frac{1}{2!}x^2 - \sum_{n=2}^{\infty}\frac{3.7.\dots.(4n-5)}{(2n)!}\right) + c_1\left(x + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1.5.9.\dots.(4n-3)}{(2n+1)!}x^{2n+1}\right)$$

Chú ý 2 Trong Ví dụ 2 ta đã giả thiết rằng phương trình vi phân có nghiệm dạng chuỗi. Nhưng bây giờ chúng ta cần kiểm tra trực tiếp rằng hàm đã cho bởi phương trình [8] đúng là nghiệm.

Chú ý 3 Khác với tình trạng của Ví dụ 1, chuỗi lũy thừa sinh ra trong Ví dụ 2 không xác định các hàm cơ bản. Các hàm

$$y_1(x) = 1 - \frac{1}{2!}x^2 - \textstyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{3.7.\dots.(4n-5)}{(2n)!} \text{ và } y_2(x) = x + \textstyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1.5.9.\dots.(4n-3)}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$

là các hàm hoàn toàn tốt nhưng chúng không thể được biểu diễn bởi các hàm cơ bản quen thuộc. Chúng ta có thể sử dụng chuỗi lũy thừa biểu diễn y_1 và y_2 để tính các giá trị xấp xỉ của hàm và thậm chí vẽ đồ thị của chúng. Hình 1 chỉ ra một vài tổng riêng đầu tiên T_0, T_2, T_4, ... (đa thức Taylor) của $y_1(x)$, và ta thấy chúng hội tụ tới $y_1(x)$ như thế nào. Bằng cách đó, chúng ta vẽ đồ thị của cả $y_1(x)$ và $y_2(x)$ trên Hình 2.

Chú ý 4 Nếu chúng ta được yêu cầu giải bài toán giá trị đầu

$$y'' - 2xy' + y = 0 \qquad y(0) = 0 \qquad y'(0) = 1$$

chúng ta cần nhớ lại rằng, theo khai triển Maclaurin thì $c_0 = y(0) = 0$ và $c_1 = y'(0) = 1$.

Điều đó có thể làm đơn giản việc tính toán trong Ví dụ 2, bởi vid tất cả các hệ số với chỉ số chẵn cần phải bằng 0. Nghiệm của bài toán giá trị đầu là

$$y(x) = x + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1.5.9.\dots.(4n-3)}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$